باسمه تعالی
فهرستبرگه منابع چاپ سنگی - اداره مخطوطات

شماره ثبت:	۲۸۲۳۳
رده‌بندی دیویی:	۵۱۶٫۲۴.۷۶ ه ۷۲۵ م ۱۳۱۳
سرشناسه:	هنربخش، محسن، - ۱۳۳۹.
عنوان قراردادی:	
عنوان:	مثلثات برای دوره دوم متوسطه [درسی]
کاتب:	حسین میرخانی — تاریخ کتابت:
محل نشر:	تهران — ناشر: مطبعه علمی — تاریخ نشر: آذر ۱۳۱۳
صفحه شمار:	۲۲۷ ص. : مصور. — مصور☐ درسی☐ گراور یا افست☐
زبان:	فارسی — ابعاد: ۱۳٫۵×۲۰٫۵ — نوع خط: نستعلیق
روش تهیه:	وقفی☐ اهدایی☐ خریداری☐ ارسالی☐
توضیحات:	ناملدم — تاریخ ثبت: بهمن ۱۳۸۰
یادداشتها:	افست
موضوع(ها):	۱. مثلثات - کتابهای درسی - راهنمای آموزشی (متوسطه).
شناسه(های) افزوده:	الف. مهران، محمود، نویسنده همکار. ب. میرخانی، حسین، کاتب. ج. عنوان.
فهرستگار:	— تاریخ فهرستگاری: مهر ۸۹

۱۴۵۵۸۹۱
۵۱۶/۲۴۰۷
م ۷۲۵ه
ع ۵ امید

مثلثات

برای دورهٔ دوم متوسطه

مطابق دستور وزارت جلیلهٔ معارف

تألیف

محسن هنربخش - محمود مهران

معلمین علوم ریاضی

حق طبع محفوظ است

آذر ۱۳۱۳

کتابخانه آستان قدس مشهد
شماره ثبت ۲۴۱۱۵۵
تاریخ . بهمن ۸۰

بنام ایزد دانا

فصل اول - قوس و زاویه

۱- اندازهٔ قوسی از محیط دایره - اندازه گرفتن قوسی از محیط دایره سنجیدن آن قوس است

با قوسی از همین دایره که واحد فرض شده

برای اندازه گرفتن قوس دایره سه نوع واحد معمول است

درجه - $\frac{1}{360}$ محیط دایره را واحد قرار داده آنرا درجه نامیده اند برای اندازه گرفتن قوسهای کوچکتر از درجه

هر درجه را به ۶۰ دقیقه و هر دقیقه را به ۶۰ ثانیه تقسیم کرده اند آحاد کوچکتر از ثانیه با اعشار ثانیه اندازه گرفته میشود

بنابراین محیط هر دایره ۳۶۰ و نصف آن ۱۸۰ و ربع آن ۹۰ درجه است

گراد Grade - $\frac{1}{400}$ محیط دایره به گراد موسوم است اجزاء آن دسی گراد مساوی $\frac{1}{10}$ گراد

و سانتی گراد و برابر $\frac{1}{100}$ گراد و میلی گراد معادل $\frac{1}{1000}$ گراد است بقسمیکه اندازه قوس دایره در این دستگاه

عدد اعشاری میشود

از اینقرار محیط هر دایره ۴۰۰ و نصف آن ۲۰۰ و ربع آن ۱۰۰ گراد است

رادیان Radian - قوسی از محیط دایره را که طولش برابر شعاع است واحد قرار داده

آنرا رادیان نامند

بنابراین اندازه محیط هر دایره 2π و نصف آن π و ربع آن $\frac{\pi}{2}$ است

مسئله - اندازه قوسی بحسب یکی از آحاد معلوم است مطلوبست محاسبهٔ آن بحسب آحاد دیگر

فرض میکنیم قوسی A درجه و A' گراد و α رادیان باشد چون ملاحظه کنیم که محیط دایره ۳۶۰ درجه

و ۴۰۰ گراد و 2π رادیان است لذا نسبت قوس مفروض بمحیط در واحد اول $\frac{A}{360}$ و در واحد

دوم $\frac{A'}{400}$ و در واحد سوم $\frac{\alpha}{2\pi}$ میباشد اما نسبت قوس مفروض بمحیط مقداریست ثابت لذا

حاصل میشود $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{A'}{400} = \frac{A}{360}$ (۱)

از روابط فوق بفرض معلوم بودن هریک از مقادیر A یا A' یا α میتوان دو مقدار

دیگر را حساب نمود از اینقرار :

$$A = \frac{9}{10}A' = 180\,\alpha\frac{1}{\pi}\ ,\quad A' = \frac{10}{9}A = 200\,\alpha\frac{1}{\pi}\ ,\quad \alpha = \frac{\pi A}{180} = \frac{\pi A'}{200}$$

---

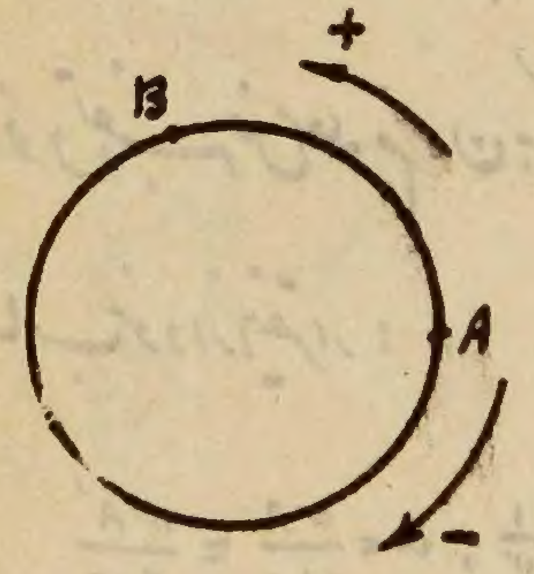
* متعلمین باید دستوراتی را که با نمره ترتیب ممتازند همواره بخاطر داشته باشند

تبصره - در حل مسائل مربوطه به تبدیلات فوق لازم است که مقادیر π و $\frac{1}{\pi}$ را با چهار رقم بعد از اعشار بخاطر سپرد π = ۳٫۱۴۱۶ و $\frac{1}{\pi}$ = ۰٫۳۱۸۳

مثال - مطلوبست اندازهٔ قوسی از دایره برحسب درجه و گراد در صورتیکه طولش مساوی شعاع دایره باشد

چون a = ۱ لذا از دستورات فوق نتیجه میشود: $A = ۱۸۰ \frac{1}{\pi}$ = ۵۷٫۲۹۵۸ یا پس از تبدیل A = ۵۷° ۱۷′ ۴۴٫۸″ و برحسب گراد $A' = ۲۰۰ \times \frac{1}{\pi}$ = ۷۳٫۶۶۲ گراد

۲- دایرهٔ جهت دار - هر نقطه متحرک میتواند محیط دایره را در دو جهت سیر نماید که یکی از دو جهت مثبت و دیگری را منفی قرار داده و چنین دایره را دایره جهت دار نامند عموماً جهت مثبت برخلاف جهت حرکت عقربه های ساعت است



س ۱

۳- اندازه قوس جهت دار - در هندسه اندازه قوسی از محیط دایره عبارت از اندازه قطعهٔ از این محیط محصور بین دو نقطه است ولی در مثلثات علاوه بر کمیت قوس جهت نیز در آن دخالت دارد بقسمیکه قوس شبیه بحامل میشود

اندازهٔ قوس جهت دار بمبداء A و منتهای B (س ۱) عبارت است از اندازه

مسافت مطویه متحرکی که از مبداء A موافق یکی از دو جهت حرکت نموده به B رسیده باشد اندازه این قوس وقتی مثبت است که حرکت متحرک در جهت مثبت صورت گرفته باشد و الا منفی است از اینجا معلوم میشود که اندازهٔ قوس دایره جهت دار غیر معین است زیرا ممکن است که متحرک این قوس را در جهت مثبت و یا در جهت منفی پیموده باشد و یا پس از چندین بار طی محیط دایره بمنتها رسد پس $\overset{\frown}{AB}$ نمایش یکی از اندازه های قوس های مطویهٔ متحرکی است که از مبدا A حرکت نموده بمنتهای B رسیده باشد

۴- قضیه - تفاضل بین اندازه های مختلفه قوس جهت دار مضربی است صحیح (مثبت یا منفی و یا صفر) از اندازه محیط دایره

فرض میکنیم اندازه هندسی قوس AB (س ۱) برحسب رادیان برابر a باشد پس چون متحرک از مبداء A در جهت مثبت مثلثاتی حرکت نموده در اولین دفعه بنقطه B رسد قوسی برابر a میپیماید حال اگر حرکت خود را ادامه داده در دفعهٔ دوم بنقطه B رسد قوسی برابر $2\pi + a$ پیموده است و در دفعهٔ سوم قوسی مساوی $2\times 2\pi + a$ و بالاخره در دفعه n ام قوسی برابر $2(n-1)\pi + a$ و یا بطور کلی $a + 2k\pi$ (۱) پیموده است

اگر متحرک مفروض در جهت منفی حرکت کند در اولین دفعه که به B میرسد قوسی طی میکند برابر

$2\pi - a$ و چون حرکت خود را در همین جهت ادامه داده در دفعه دوم بنقطه B رسد قوسی مساوی $2\cdot 2\pi - a$ خواهد پیمود بقسمیکه در دفعه n ام قوسی که اندازه اش $a - 2n\pi$ (2) است طی مینماید

دو عبارت (1) و (2) را میتوان بیک عبارت کلی $a + 2k\pi$ تبدیل نمود که در آن k نمایش عدد صحیح (مثبت و یا منفی و یا صفر) میباشد

حال اگر α و α' دو اندازه غیر مشخص قوس AB باشند بروفق دستور کلی فوق میتوان چنین نوشت $\alpha = a + 2k\pi$ و $\alpha' = a + 2k'\pi$ از تفریق این دو تساوی حاصل میشود $\alpha - \alpha' = 2(k - k')\pi$ چون k و k' اعدادی صحیحند بنابراین تفاضلشان نیز عددی صحیح بوده و لذا حکم محقق است

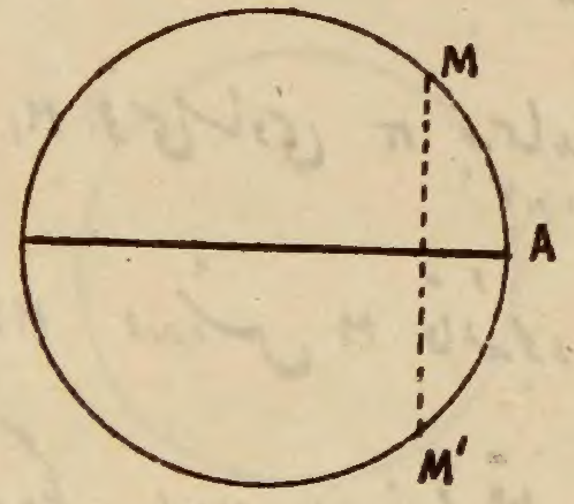
تبصرهٔ 1 — اگر α یکی از اندازه های قوس $\overset{\frown}{AB}$ برحسب رادیان باشد سایر اندازه های این قوس از دستور ذیل معلوم میشود $\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2h\pi$ (h عددی است صحیح مثبت یا منفی و یا صفر) و چون α را برحسب درجه برابر A و برحسب گراد مساوی A' فرض کنیم دستور فوق چنین میشود :

$$\overset{\frown}{AB} = A + h.360 \quad \text{و} \quad \overset{\frown}{AB} = A' + h.400$$

چنانکه اندازه نصف محیط دایره برحسب رادیان چنین است $\pi + 2k\pi$ یا $(2k+1)\pi$ یعنی کلیه اندازه های نصف محیط دایره مضروب فردی است از π

تبصرهٔ 2 — عکس قضیه فوق بسهولت اثبات میشود و بطور کلی میتوان آنرا چنین بیان نمود: در دایره جهت دار شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس متحد المبدا دارای یک انتها باشند آنست که تفاضل اندازه های آنها مضرب صحیح (مثبت یا منفی و یا صفر) از محیط دایره باشد

5 — **قوسهای قرینه** — هرگاه انتهای دو قوس متحد المبدا نسبت بقطر مار بر مبدا مشترک قرینه یکدیگر باشد چنین دو قوس را قرینه گویند مانند قوسهای $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{AM'}$



(شکل 2)

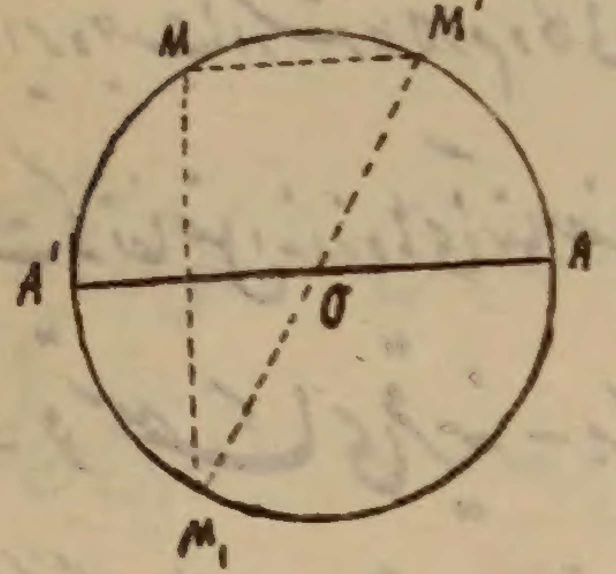
از تعریف فوق بسهولت میتوان تحقیق نمود که:

مجموع اندازه های دو قوس قرینه مضرب صحیح (مثبت یا منفی و یا صفر) از محیط دایره میباشد

6 — **قوسهای مکمل و متمم** — دو قوس را مکمل یکدیگر گویند وقتیکه مجموع اندازه های آنها مساوی اندازه نصف محیط دایره باشد و وقتی متممند که مجموع اندازه های آنها برابر اندازه ربع دایره باشد. مثلاً قوسهای a و $\pi - a$ مکمل و قوسهای a و $\frac{\pi}{2} - a$ متممند

۷- **قضیه** – شرط لازم کافی برای اینکه دو قوس متحد المبدا شکل یکدیگر باشند آنست که خط واصل بین دو انتهایشان موازی قطر مار از مبدا مشترک باشد

فرض میکنیم متحرکی از مبدا A بر محیط دایره حرکت نموده و پس از طی قوس a بنقطه M رسیده باشد برای اینکه متحرک دیگری شکل این

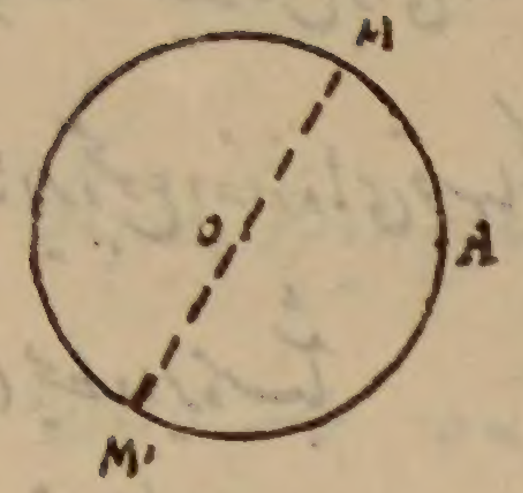


قوس یعنی $a-\pi$ را بپیماید کافی است که از مبدا A قوسی برابر a طی کند در اینصورت بنقطه M_1 قرینه M خواهد رسید و چون از نقطه M_1 قوسی مساوی π بپیماید بنقطه M' قرینه مرکزی M_1 میرسد لذا مثلث MM_1M' در رأس M قائمه بوده و چون ضلع MM_1 بر قطر AA' عمود است پس ضلع دیگر MM' موازی این قطر میشود

۸- **قضیه** – هرگاه تفاضل اندازه‌های دو قوس متحد المبدا مضرب فردی از نیم دایره باشد دو انتهای آنها نسبت بمرکز دایره قرینه خواهند بود

فرض میکنیم $\widehat{AM'} - \widehat{AM} = \pi + 2k\pi$ باشد حال چون ملاحظه کنیم که $\widehat{AM'} - \widehat{AM} = \widehat{MM'}$ میباشد لذا نتیجه میشود که اندازه قوس $\widehat{MM'}$ مساوی اندازه نصف محیط دایره بوده و بنابراین دو نقطه

M و M' طرفین یک قطر واقع خواهند بود

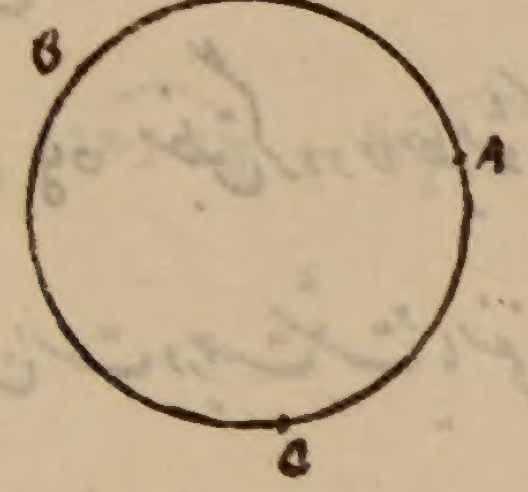


۹- **قضیه** – چون بر محیط دایره سه نقطه A و B و C را فرض کنیم همواره بین اندازه‌های سه قوس $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ و $\widehat{CA}$ این رابطه برقرار است

$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 2K\pi$ (K عددی است صحیح مثبت یا منفی و یا صفر)

اگر a و b و c بترتیب اندازه‌های هندسی قوسهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ و $\widehat{AC}$ باشند نتیجه میشود

$$c = a + b \quad (1)$$



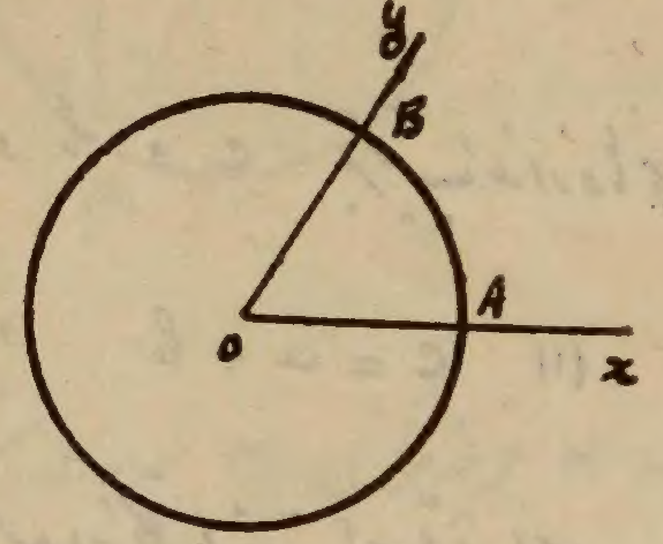
بنابر آنچه میدانیم کلیه اندازه‌های قوسهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ و $\widehat{AC}$ چنین اند

$$\widehat{AC} = c + 2k''\pi \quad \text{و} \quad \widehat{BC} = b + 2k'\pi \quad \text{و} \quad \widehat{AB} = a + 2k\pi$$

حال اگر مقادیر a و b و c را از این روابط خارج نموده در رابطه (۱) گذاریم پس از جمع جمل متشابه چنین میشود $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} + 2f\pi$ چون بر طرفین این تساوی قوس $\widehat{CA}$ را علاوه نموده و $2f\pi$ را بطرف ثانی نقل دهیم با ملاحظه $\widehat{AC} + \widehat{CA} = 2n\pi$ حکم قضیه محقق است

تبصره – قضیه فوق برای n نقطه واقع بر محیط دایره نیز محقق بوده و آنرا میتوان چنین بیان نمود
در یک دایره مجموع اندازه های قوسهائیکه مبداء یکی منتهای دیگری است مضرب صحیح (مثبت یا منفی یا صفر) محیط دایره میباشد

۱۰– اندازه زاویه – در صفحه زاویه xoy جهت دوران ضلع ox حول نقطه o را که مخالف جهت دوران عقربه های ساعت است جهت مثبت قرارداده و جهت مخالف آنرا جهت منفی اختیار میکنیم



حال اگر ضلع ox را حول نقطه o دوران دهیم تا بر oy منطبق گردد ملاحظه میشود که این انطباق ممکن است در جهت مثبت و یا منفی پس از پیمودن یک یا چند دور حول نقطه o حاصل گردد بطوریکه برای انطباق ox بر oy زوایای مختلفه را ممکن است ضلع ox بپیماید بنا بتعریف اندازه هریک از این زوایا را اندازه زاویه دو خط شعاعی ox و oy میگویند و علامت آن مثبت یا منفی است بنابر آنکه جهت دوران مثبت و یا منفی باشد از این نتیجه میشود که اندازه زاویه نیز مانند قوس غیر معین است

برای نمایش زاویه دو خط شعاعی ox و oy ضلع ox را مبداء و oy را منتها نامیده

آنرا چنین نویسند $\widehat{ox, oy}$

میدانیم اندازه زاویه مرکزی مساوی اندازه قوس واقع بین ضلعین آنست درصورتیکه واحد زاویه باشد که قوس مقابلش واحد قوس فرض شود

از اینجا معلوم میشود که آنچه راجع باندازه قوس ها ذکر نمودیم شامل زوایا نیز خواهد بود چنانکه اگر α و A و A' بترتیب یکی از اندازه های زاویه $\widehat{ox, oy}$ برحسب رادیان و درجه و گراد باشد روابط ذیل حاصل است :

$$\widehat{ox, oy} = \alpha + 2K\pi$$

$$\widehat{ox, oy} = A + K.360 \qquad \widehat{ox, oy} = A' + K.400$$

همچنین اگر خطوط شعاعی متحد المبدا ox و oy و oz ...... و ok مفروض باشند همواره این رابطه برقرار است :

$$\widehat{ox, oy} + \widehat{oy, oz} + \cdots\cdots + \widehat{ok, ox} = 2K\pi$$

تمرینات

۱– قوس های ذیل را برحسب درجه و رادیان حساب کنید

۳۸٫۵۴۳ گراد ، ۷۵۵٫۲۵ گراد ، ۹۵ گراد ، ۵۵ گراد ، ۱۵ گراد

۲ – قوس های ذیل را برحسب گراد و رادیان حساب کنید

۳۶٫۵ ، ۱۸° ۱۲′ و ۴۲″ ، ۷۵° ۳۵′ ، ۱۵۰°

۳- قوسهای ذیل را حسب درجه و گراد حساب کنید

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ رادیان و $\frac{17\pi}{12}$ و ۳ رادیان و $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{2\pi}{3}$

۴- شعاع دایره ۴۰٫۱ متر است مطلوبست محاسبه طول سه قوس از این دایره که اندازهٔ آنها به ترتیب برابر ۱۸٫۴ گراد و $55^\circ\,25'$ و ۲٫۷ رادیان باشد

۵- طولهای قوسهائی از دایره بشعاع واحد برابرند با :

$\frac{\sqrt{2}}{20}+\frac{3}{2}$ و $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ و $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{22}{7}$ و ۳

مطلوبست محاسبهٔ آنها بر حسب درجه و گراد

۶- وضع نسبی انتهای سه قوس متحد المبدأ α و $\alpha+\frac{\pi}{4}$ و $\alpha+\frac{3\pi}{4}$ را تعیین کنید

۷- متمم و مکمل قوسهای ذیل را حساب کنید

$75^\circ\,19'$ و $297^\circ\,15'\,18''$ و $115^\circ\,27'$ و $14^\circ\,18'$

و -274.25 گراد و 651.12 گراد و 174.075 گراد و 84.19 گراد

و $\frac{7\pi}{12}$ و $-\frac{19\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$

۸- تعریف - در روی دایره جهت داری نقطهٔ O را مبدأ قرار داده اندازه قوس $\widehat{OM}$ را طول منحنیهٔ نقطه M گویند

اگر طولهای منحنیهٔ دو نقطه A و B معلوم شد مطلوبست محاسبهٔ اندازه قوس $\widehat{AB}$

۹- انتهای هر یک از قوسهای ذیل را بازاء مقادیر مختلفه K تعیین کنید (K عددی است صحیح و جبری)

$-\frac{\pi}{2}+\frac{3K\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}+\frac{K\pi}{2}$ ، $-\frac{\pi}{6}+\frac{2K\pi}{3}$

۱۰- مطلوبست تعیین اوساط قوسهائیکه در مبدأ و منتها بر هم منطبق باشند اندازه این قوسهای نصف را از مبدأ مشترک تعیین کنید

۱۱- فرض میکنیم a و b اندازه‌های دو قوس مبدأ مشترک A و با انتهای M و N باشند هرگاه P و Q اوساط قوسهای $\widehat{MN}$ فرض شوند ثابت کنید که کلیه اندازه‌های قوسهای $\widehat{AP}$ و $\widehat{AQ}$ را میتوان از عبارت ذیل تعیین نمود $K\pi+\frac{a+b}{2}$

(K عدد صحیح جبری است)

۱۲- ثابت کنید که واسطهٔ عددی دو قوس $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ قوسی است که مبدأش نقطه A بوده و منتهایش وسط قوس $\widehat{MM'}$ باشد

فصل دوم

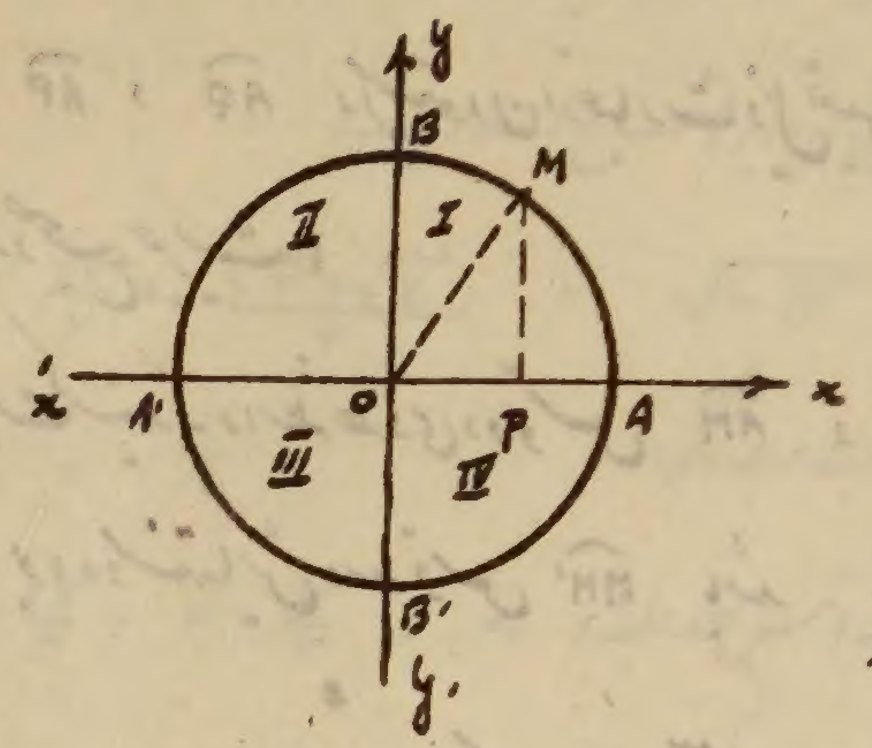
توابع مستدیره یا خطوط مثلثاتی

۱۱- توابع مستدیره - توابع مستدیره توابعی هستند که در آنها متغیر قوسی از محیط دایره باشد

۱۲- توابع متناوبه - تابع $f(x)$ را متناوب گویند وقتیکه بازاء جمیع مقادیر x این رابطه محقق باشد $f(x+A)=f(x)$ مقدار ثابت A را دوره تناوب گویند

۱۳- دایرهٔ مثلثاتی - دایرهٔ مثلثاتی دایره ایست که شعاعش واحد طول فرض شود

۱۴- جیب تمام - Cosinus - نقطهٔ A را بر محیط دایرهٔ مثلثاتی O مبداء قرار داده بر قطر AA' محور xx' را که بمحور جیب تمام موسوم است بر دو رسید هم جهت مثبت بر این محور از O بسمت A است



جیب تمام قوس غیر مشخص AM عبارت از تصویر قائم حامل OM بر محور xx' است و یا عبارت از طول نقطه M نسبت بمحورهای مختصات xx' و yy' عمود بر آن میباشد

جیب تمام قوس AM را من باب اختصار چنین نویسند $\cos \widehat{AM}$ ولذا $\cos AM = \overline{OP}$

از اینجا معلوم میشود که $\overline{OP}$ جیب تمام کلیه قوسهائی است که مبداء A و منتهای M باشد بطوریکه اگر یکی از اندازه های قوس AM را مساوی α فرض کنیم چنین نتیجه میشود

$$(2) \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

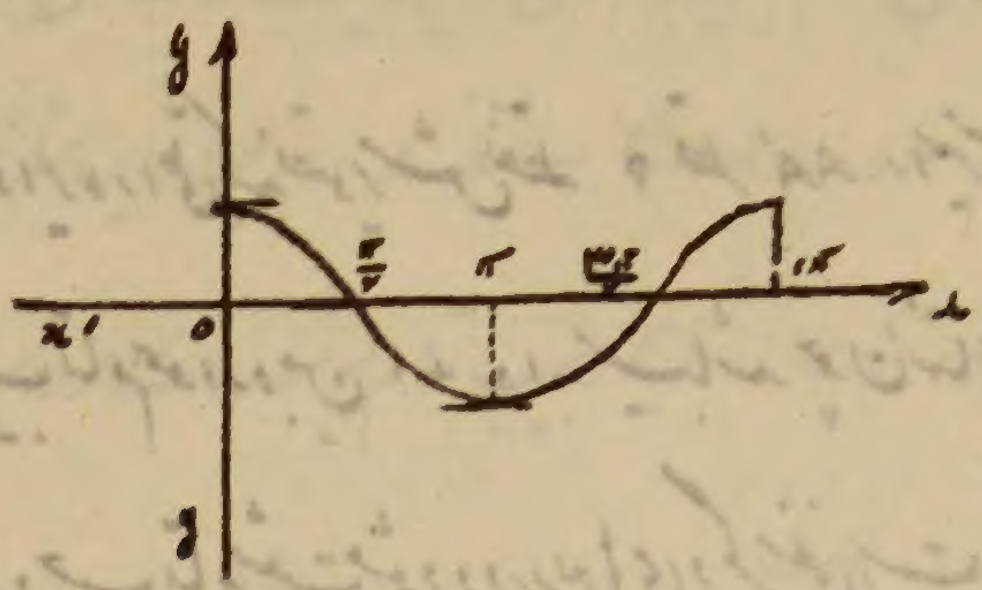
تغییرات جیب تمام - چون قطر B'B عمود بر A'A را امر و رسم محیط دایرهٔ مثلثاتی بچهار ربع تقسیم میشود

هرگاه نقطه M محیط دایره را طی کند تصویرش نقطه P قطر AA' را طی مینماید لذا بازاء جمیع مقادیر قوس جیب تمام همواره بین ۱+ و ۱- میباشد چون انتهای قوس در ربعهای اول و چهارم قرار گیرد جیب تمام مثبت میشود و در ربع های دیگر منفی است ما گزینیم آن توقفی است که قوس AM مضرب محیط دایره باشد $\cos 2k\pi = +1$ و می نیم آن موقعی است که قوس تغییر مضرب فرد π شود $\cos(2k+1)\pi = -1$ و چون قوس AM مساوی $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ شود (یعنی انتهای آن بر نقطه B یا B' قرار گیرد) جیب تمام مساوی صفر میشود $\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

از دستور (۲) معلوم میشود که جیب تمام از توابع متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن 2π است پس تعیین تغییرات این تابع در یکدورهٔ محیط کفایت میکند جدول تغییرات آن در یکدوره محیط چنین است

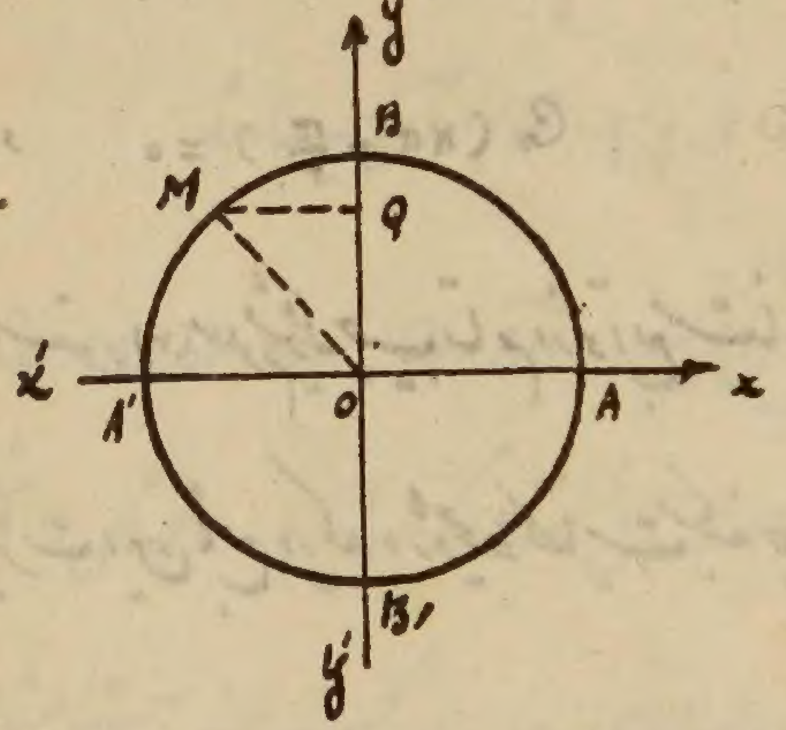
قوس		ربع اول		ربع دوم		ربع سوم		ربع چهارم	
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	+1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	+1

بوسیلهٔ این جدول بسهولت میتوان منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \cos x$ را بازاء $0 \leq x \leq 2\pi$ رسم نمود



چنانکه بعد خواهیم دید در سطح این منحنی خطوط $x = K\pi$ محورهای تقارن منحنی و نقاط $K\pi + \frac{\pi}{2}$ | مراکز تقارن آنند

۱۵- جیب Sinus - محور $y'y$ عمود بر $x'x$ را بطریقی اختیار میکنیم که $\widehat{ox, oy} = +\frac{\pi}{2}$ باشد محور فوق را محور جیب نامند



جیب قوس غیر مشخص $\widehat{AM}$ عبارت از تصویر قائم حامل OM بر محور $y'y$ است و یا عرض نقطه M نسبت بمحورهای مختصات $x'x$ و $y'y$ میباشد

جیب هر قوس را من باب اختصار چنین نویسند sin و لذا $\sin \widehat{AM} = \overline{OQ}$

پس $\overline{OQ}$ جیب قوسهائی است که مبداء A و منتهای M باشند لذا نتیجه میشود

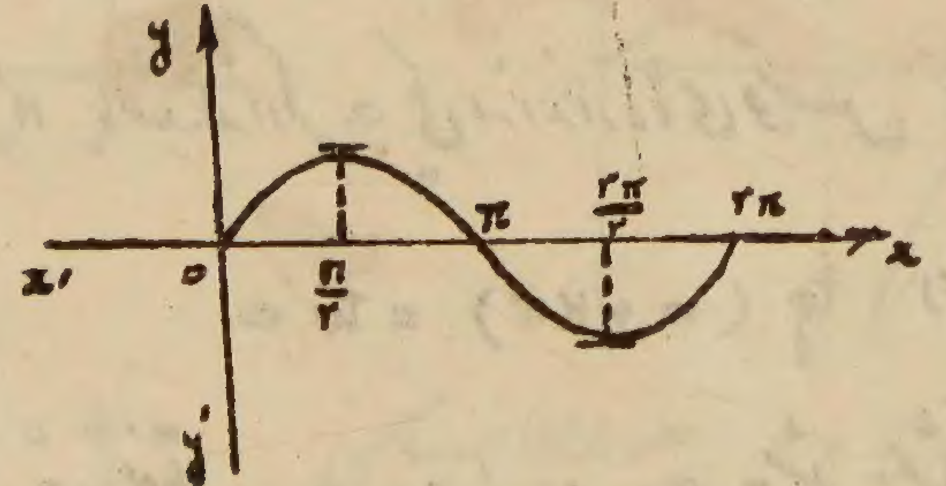
$$(3) \quad \sin(a + 2K\pi) = \sin a$$

تغییرات جیب - مانند جیب تمام جیب قوس نیز همواره بین ۱+ و ۱- واقع میباشد ولی چون انتهای قوس در ربع های اول و دوم قرار گیرد جیب مثبت میشود و در دو ربع دیگر جیب قوس منفی میگردد ماگزیمم آن وقتی است که انتهای قوس به نقطه B واقع شود $\sin(\frac{\pi}{2} + 2K\pi) = +1$ و می نیمم آن موقعی است که انتهای قوس بر نقطه B' قرار گیرد $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2K\pi) = -1$ و چون نقطه M بر A' یا A منطبق شود جیب قوس صفر میشود $\sin K\pi = 0$

جیب قوس نیز از توابع متناوبه بوده و دوره تناوب آن π میباشد

جدول و منحنی نمایش تغییرات این تابع در یکدوره محیط چنین است

قوس		ربع اول		ربع دوم		ربع سوم		ربع چهارم	
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	↗	$+1$	↘	0	↘	-1	↗	0



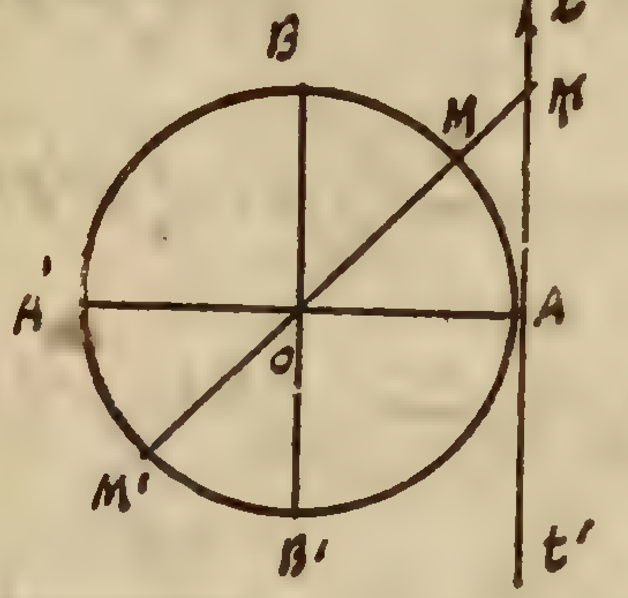
خطوط $x = K\pi + \frac{\pi}{2}$ محورهای تقارن این منحنی میباشند و نقاط $K\pi$ | مراکز تقارن آنند

ج۲۸۲۳۲
۲٤۱۱۵۵
۴

تبصره – منحنی‌های نمایش تغییرات جیب و جیب‌تمام را Sinusoide سینوسوئید نامند

۱۶- ظل Tangente – در دایرهٔ مثلثاتی مماس بر مبدأ A را محور ظل نامند و بر آن جهت از A به t (موافق جهت مثبت محور جیب) را جهت مثبت قرار داده‌اند

ظل قوس غیر مشخص $\widehat{AM}$ عبارت از حاملی است مانند $\overline{AT}$ که مبدأ آن نقطه A و منتهایش محل تقاطع امتداد شعاع OM با tt' باشد



من باب اختصار ظل قوس a را چنین نویسند $tg\, a$

از تعریف فوق معلوم میشود که $\overline{AT}$ ظل کلیهٔ قوسهائی است که مبدأ A و منتهای M و یا قرینه مرکزی آن M' باشد لذا اگر a یکی از اندازه‌های قوس $\widehat{AM}$ باشد این تساوی حاصل است

$$tg\,(a + K\pi) = tg\, a \qquad (۴)$$

تغییرات ظل – چون نقطه M از مبدأ A در جهت مثبت مثلثاتی شروع بحرکت نماید ظل قوس $\widehat{AM}$ از صفر ترقی میکند و هرچه نقطه M به نقطه B نزدیک شود ظل قوس به

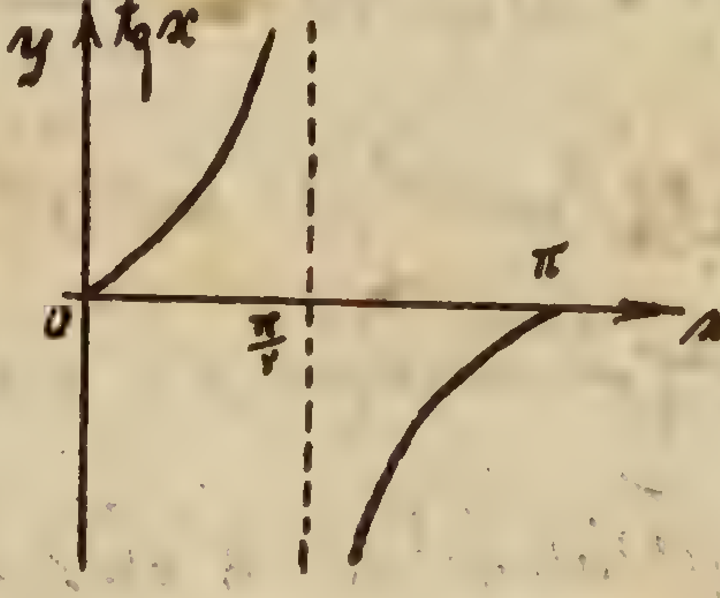
$+\infty$ میل میکند همینکه نقطه M داخل ربع دوم شود ظلش منفی میگردد ولی همواره در حال ترقی است زیرا هرچه نقطه M' به A' نزدیک شود ظل قوس از $-\infty$ ترقی نموده به صفر میل میکند و چون نقطه M داخل ربع سوم و چهارم شود ظل قوس جمیع مقادیر قبل را اختیار مینماید

ظل قوس برخلاف جیب و جیب تمام محدود نبوده و همواره تابعی است صعودی این تابع وقتی صفر میشود که انتهای قوس در نقاط A یا A' قرار گیرد یعنی $tg\, K\pi = 0$ و وقتی بینهایت است که انتهای آن بر نقاط B یا B' واقع شود یعنی $tg\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) = \infty$

از دستور (۴) معلوم میشود که ظل قوس تابعی است متناوب و دور تناوب آن π میباشد

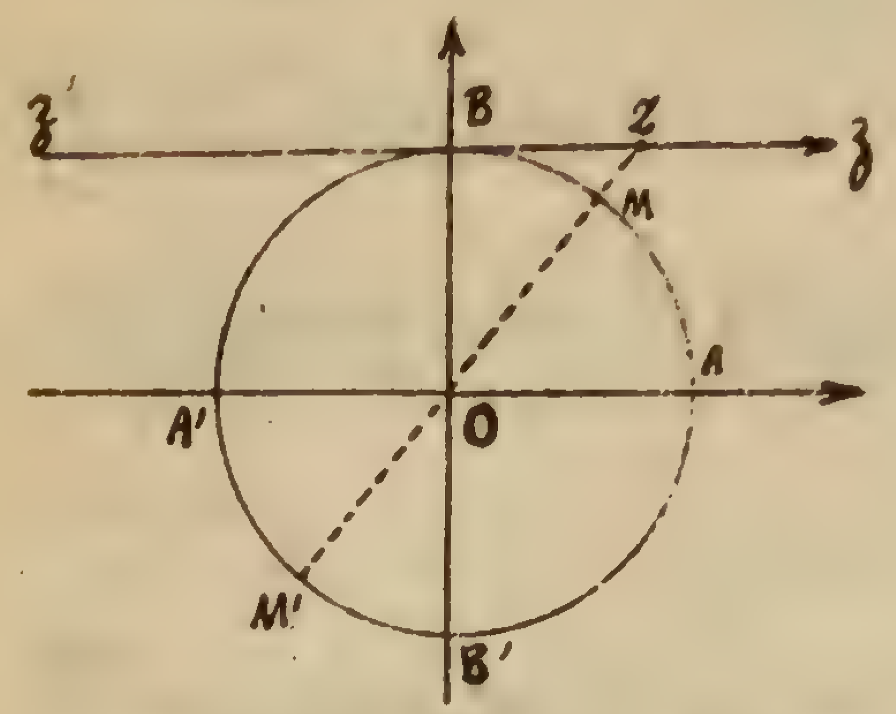
جدول و منحنی نمایش تغییرات این تابع بازاء $0 \leq x \leq \pi$ چنین میشود

قوس	ربع اول		ربع دوم	
x	0	$\frac{\pi}{2}$		π
$tg\, x$	$0 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow$	0



خطوط $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$ خطوط مجانب منحنی $y = tg\, x$ میباشند و نقاط $\left|\begin{matrix}K\pi\\0\end{matrix}\right.$ مراکز تقارن آنند

۱۷ **ظل تمام** Cotangente - بر نقطه B مماس $z'z$ را موازی محور جیب تمام



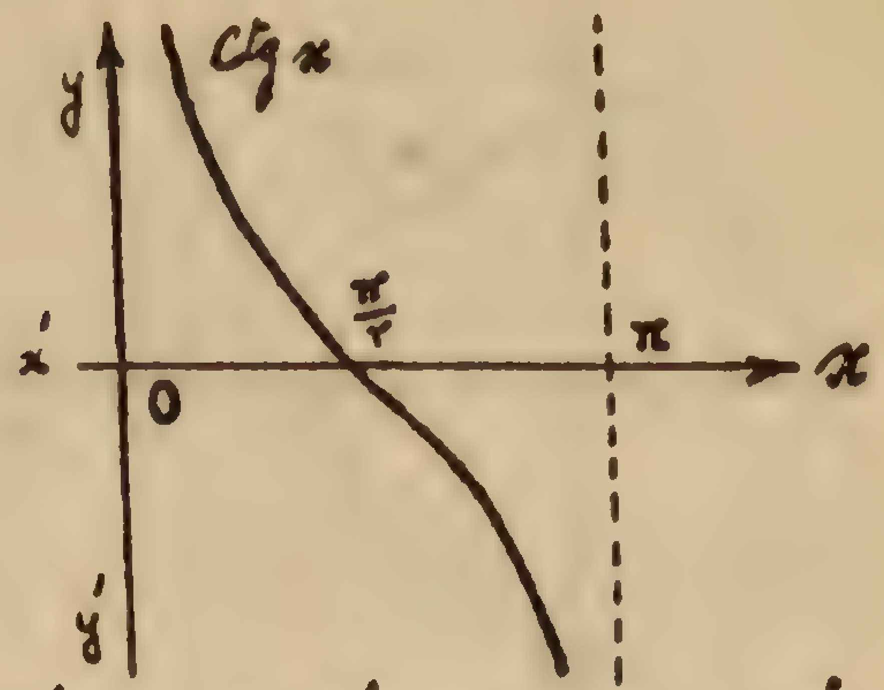
و موافق جهت مثبت آن محور رسم کرده آنرا محور ظل تمام نامیده‌اند ظل تمام قوس $\overset{\frown}{AM}$ عبارت از حامل $\overline{Bz}$ واقع بر $z'z$ است که مبداء آن نقطه ثابت B و منتهای آن محل تقاطع امتداد شعاع OM با محور $z'z$ میباشد

من باب اختصار ظل تمام قوس a را چنین نویسند ctg a ولذا نتیجه میشود

$$(5)\quad \operatorname{ctg}(a+K\pi) = \operatorname{ctg} a$$

تغییرات ظل تمام - ظل تمام تابعی است متناوب و دوره تناوب آن π میباشد در ربع اول و سوم مثبت و در ربع دوم و چهارم منفی است ولی برخلاف ظل تابعی است نزولی چون انتهای قوس $\overset{\frown}{AM}$ بر نقاط A یا A' واقع شود مقدارش بینهایت میگردد $\operatorname{ctg} K\pi = \infty$ و چون انتهای قوس بر نقاط B یا B' قرار گیرد مقدار آن مساوی صفر میشود $\operatorname{ctg}\left(K\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 0$

جدول و منحنی تغییرات آن در یکدوره تناوب چنین است :



قوس	ربع اول		ربع دوم	
x	0	$\frac{\pi}{2}$		π
ctg x	+∞ ↘	0	↘ −∞	+∞

خطوط $x = K\pi$ خطوط مجانب منحنی نمایش این تابع و نقاط $\left|K\pi+\frac{\pi}{2}\right.$ مراکز تقارن آنند

تبصره - از مقایسه تغییرات ظل و ظل تمام نتایج ذیل حاصل میشود :

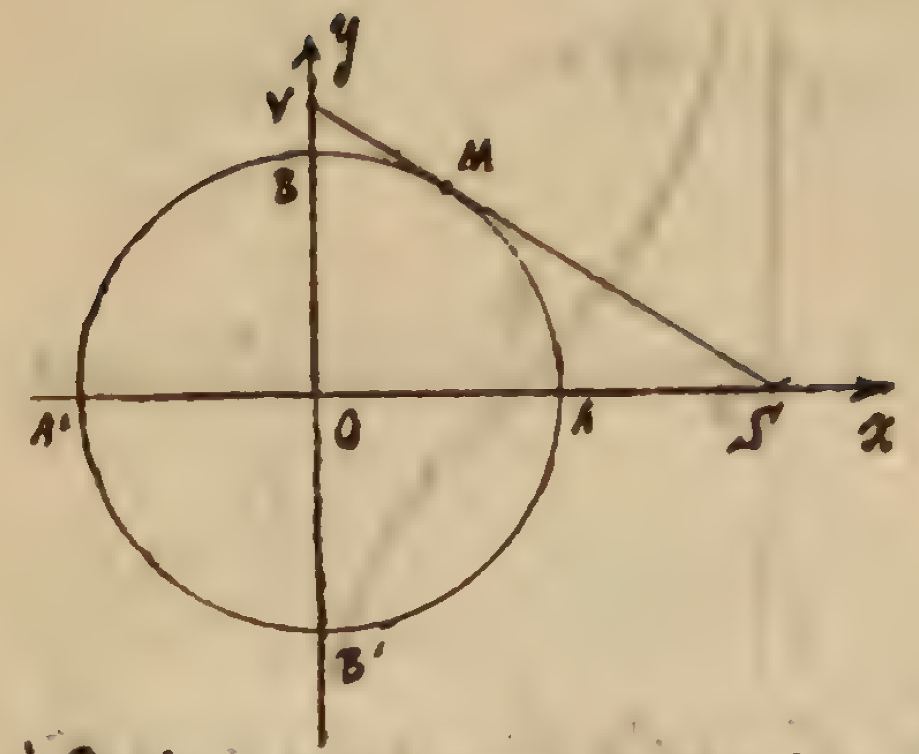
اولاً ظل و ظل تمام یکقوس متحد العلامه اند

ثانیاً جهت تغییرات این دو تابع عکس یکدیگر است ظل همواره تابعی است صعودی در صورتیکه ظل تمام تابعی است نزولی

ثالثاً وقتیکه یکی مساوی صفر است دیگری برابر بینهایت است

۱۸ - **قطر ظل** Sécante **و قطر ظل تمام** - Cosécante

چون بر نقطه غیر مشخص M واقع بر محیط دایره مثلثاتی مماسی رسم کنیم امتدادش محور جیب تمام را در نقطه T و محور جیب را در نقطه S قطع مینماید حامل $\overline{OS}$ را قطر ظل و حامل $\overline{OT}$ را قطر ظل تمام نامیده‌اند



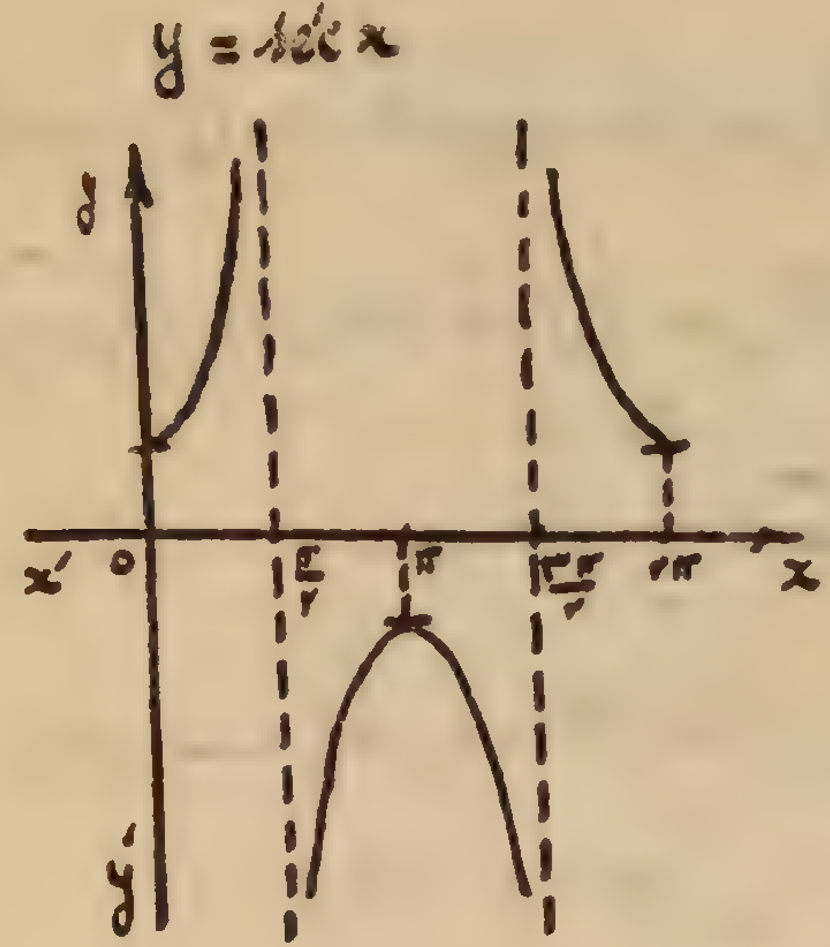
من باب اختصار قطرظل و قطرظل تمام قوس α را چنین نویسند $\sec\alpha$ و $\mathrm{cosec}\,\alpha$ ولذا

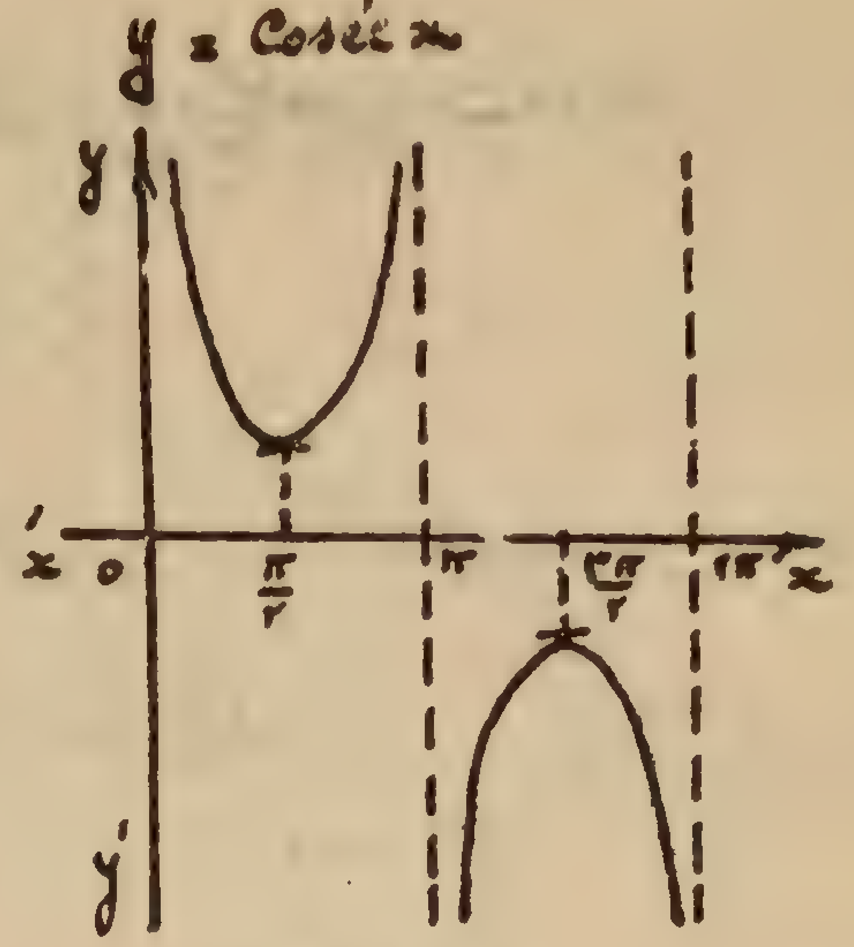
(۷) $\mathrm{cosec}\,(\alpha+2k\pi)=\mathrm{cosec}\,\alpha$ (۶) $\sec(\alpha+2k\pi)=\sec\alpha$

تغییرات قطرظل و قطرظل تمام — در ربع اول این دو تابع هر دو مثبتند چون نقطه M از A حرکت نموده در جهت مثبت به B نزدیک شود قطرظل از ۱+ شروع بترقی مینماید درصورتیکه قطرظل تمام از بینهایت تنزل میکند و همینکه نقطه M بر B منطبق شود قطرظل بینهایت و قطرظل تمام صفر میشود در ربع دوم قطرظل منفی است درصورتیکه قطرظل تمام مثبت میباشد ولی هر دو ترقی میکنند و چون نقطه M بر A' منطبق شود قطرظل مساوی ۱- و قطرظل تمام برابر بینهایت میگردد در ربع سوم هر دو تابع منفی میباشند ولی قطرظل نزولی و قطرظل تمام صعودی است و بالأخره در ربع چهارم قطرظل تمام منفی است اما هر دو تابع نزولی میباشند

جدول و منحنی نمایش تغییرات این دو تابع چنین است

قوس		ربع اول		ربع دوم		ربع سوم		ربع چهارم	
x	۰		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sec x$	۱+	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	۱-	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۱+
$\mathrm{cosec}\, x$	$+\infty$	↘	۱+	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	۱-	↘	$-\infty$





تبصره — اولاً قطرظل و جیب تمام یک قوس و همچنین قطرظل تمام و جیب متحد العلامه اند ثانیاً قطرظل و قطرظل تمام فقط جمیع مقادیر خارج ۱+ و ۱- را اختیار میکنند چنانکه بعد خواهیم دید میتوان بوسیله روابط بین این دو تابع و جیب و جیب تمام کلیه مطالب فوق را بسهولت استنباط نمود

۱۹— **خطوط مثلثاتی قوس** — بر وفق تعاریف فوق هر قوس دارای یک جیب و یک جیب تمام و یک ظل و یک ظل تمام و یک قطرظل و یک قطرظل تمام میباشد که آنها را خطوط مثلثاتی آن قوس نامند

۲۰— **خطوط مثلثاتی زاویه** — نقطه O رأس زاویه $\widehat{xOM}$ را مرکز قرار داده بشعاع واحد دایره رسم میکنیم نقاط A و M محل تقاطع محیط این دایره با ضلعین زاویه مفروض است

چون اندازه این زاویه مساوی اندازه قوس $\overline{AM}$ واقع بین ضلعین آنست لذا خطوط مثلثاتی آن نیز مساوی خطوط مثلثاتی قوس $\overline{AM}$ میباشد

تمرینات

۱۳ - x قوسی است بین صفر و ۲π مطلوبست تعیین تغییرات توابع ذیل :

$y = 5 - 2\cos x$ $\qquad$ $y = 2\sin x - 1$

$y = \sin^2 x - 3\sin x + 2$ $\qquad$ $y = 3\,\mathrm{tg}\, x - 2$

۱۴ - بازاء چه مقادیر x این روابط برقرار است :

$\mathrm{Cosec}\,\beta = \dfrac{3x-1}{x^2+3x+2}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}$

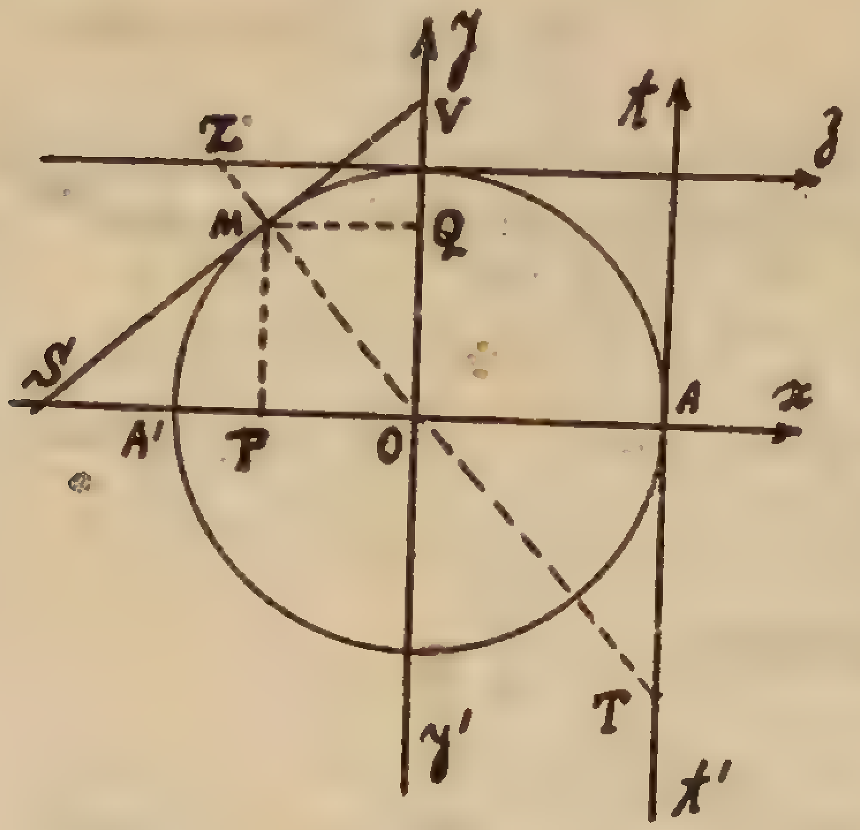
۱۵ - از نقطه M مماس S'S را بر دایره مثلثاتی رسم میکنیم و در روی این خط جهت مثبت را مخالف جهت مثبت دایره قرار داده و فرض میکنیم M نقطه تقاطع امتداد شعاع OA با محور S'S باشد ثابت کنید که قطعه خط $\overline{MT}$ مساوی ظل قوس $\overline{AM}$ میباشد و همچنین هرگاه S محل تقاطع شعاع OB عمود بر OA با محور S'S باشد ثابت کنید که قطعه خط $\overline{MS}$ مساوی ظل تمام قوس $\overline{AM}$ است

۱۶ - مطلوبست رسم هندسی قوس کوچکتر از ربع محیط درصورتیکه بدانیم وتر آن مساوی جیب تمامش میباشد

فصل سوم

۱ - روابط بین خطوط مثلثاتی یکقوس

۲۱ - قضیهٔ ۱ - مجموع مربع جیب و جیب تمام یکقوس مساوی واحد است



در مثلث قائم الزاویه OMP بقضیه فیثاغورث این رابطه حاصل است

$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2$ و از آنجا

$$(8) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

۲۲ - قضیهٔ ۲ - ظل هر قوس مساوی نسبت جیب آنقوس بجیب تمام آنست

س ۱۴

از تشابه دو مثلث قائم الزاویه OAT و OMP (س ۱۴) نتیجه میشود

$\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{OP}}$ یا $\qquad (9) \quad \mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

۲۳ - قضیهٔ ۳ - ظل تمام هر قوس مساوی نسبت جیب تمام آنقوس بجیب آنست

از دو تشابه دو مثلث OMQ و OZB (ش ۱۴) حکم محقق است $\dfrac{\overline{BZ}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{QM}}{\overline{OQ}}$

یا $\qquad (10) \quad \mathrm{Cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

۲۴ - نتیجه - ظل تمام هر قوس عکس ظل آنقوس است $\qquad (11) \quad \mathrm{Ctg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x}$

۲۵ - قضیهٔ ۴ - قطر ظل هر قوس عکس جیب تمام آنقوس است

در مثلث قائم الزاویه OMS (ش ۱۲) این رابطه حاصل است $\overline{OM}^2 = \overline{OP} \times \overline{OS}$

ویا $1 = \cos x \times \sec x$ ولذا

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad (۱۲)$$

۲۶- **قضیهٔ ۵** - قطر ظل تمام هر قوس مساوی جیب آنقوس است

در مثلث قائم الزاویه OMV (ش ۱۲) این رابطه حاصل است $\overline{OM}^2 = \overline{OQ} \times \overline{OV}$

ویا

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \qquad (۱۳)$$

۲۷- **تبصره** - از پنج قضیهٔ فوق پنج رابطهٔ متمایز ذیل که بروابط اصلیه موسومند نتیجه میشود

$$R \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \\ \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

بسهولت ملاحظه میشود که روابط دستگاه R از یکدیگر متمایز بوده یعنی هیچیک نمیتوانند نتیجهٔ ترکیب روابط دیگر باشد وبعلاوه نمیتوان رابطهٔ متمایز دیگری غیر از روابط دستگاه فوق بین خطوط مثلثاتی یک قوس برقرار نمود چه در اینصورت این رابطه با روابط دستگاه R تشکیل شش معادله

شش مجهولی میدهند که از حل آن خطوط مثلثاتی قوس بدست آمده لذا قوس مشخص میگردد وحال آنکه روابط فوق عمومیت داشته وبرای کلیهٔ قوسها برقرار است بنابراین روابط دیگر مانند رابطهٔ (۱۱) ونظایر آن از روابط دستگاه فوق متمایز نبوده ونتیجهٔ ترکیب آنها میباشند

۲۸- **روابط دیگر** - از روابط اصلیهٔ فوق دو رابطهٔ ذیل که مورد استعمال زیاد دارند نتیجه میشود

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (۱۴)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x \qquad (۱۵)$$

۲۹- **مورد استعمال روابط فوق** - بوسیلهٔ روابط اصلیه میتوان مسئلهٔ ذیل را حل نمود

یکی از خطوط مثلثاتی قوسی معلوم است مطلوبست محاسبهٔ سایر خطوط مثلثاتی آن

با رعایت معلوم بودن یکی از خطوط مثلثاتی دستگاه R تشکیل دستگاه پنج مجهولی را میدهد که بسهولت از حل آن میتوان سایر خطوط مثلثاتی را تعیین نمود

مثال ۱ - مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسی که جیب تمامش معلوم باشد

از رابطهٔ اول دستگاه R نتیجه میشود $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ ولذا $\operatorname{tg} x = \dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$

و $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\pm \cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ ، $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ، $\operatorname{cosec} x = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

از این دستورات معلوم میشود که باستثنای قطر ظل برای سایر خطوط مثلثاتی قوس دو مقدار مساوی

و مختلف العلامه حاصل میشود

مثال ۲- مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوسی که ظلش معلوم است

از دستور (۱۴) حاصل میشود $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$ و $\sec x = \pm \sqrt{1+tg^2 x}$

و لذا از روابط دستگاه R نتیجه میشود $\sin x = \frac{\pm tg\, x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$

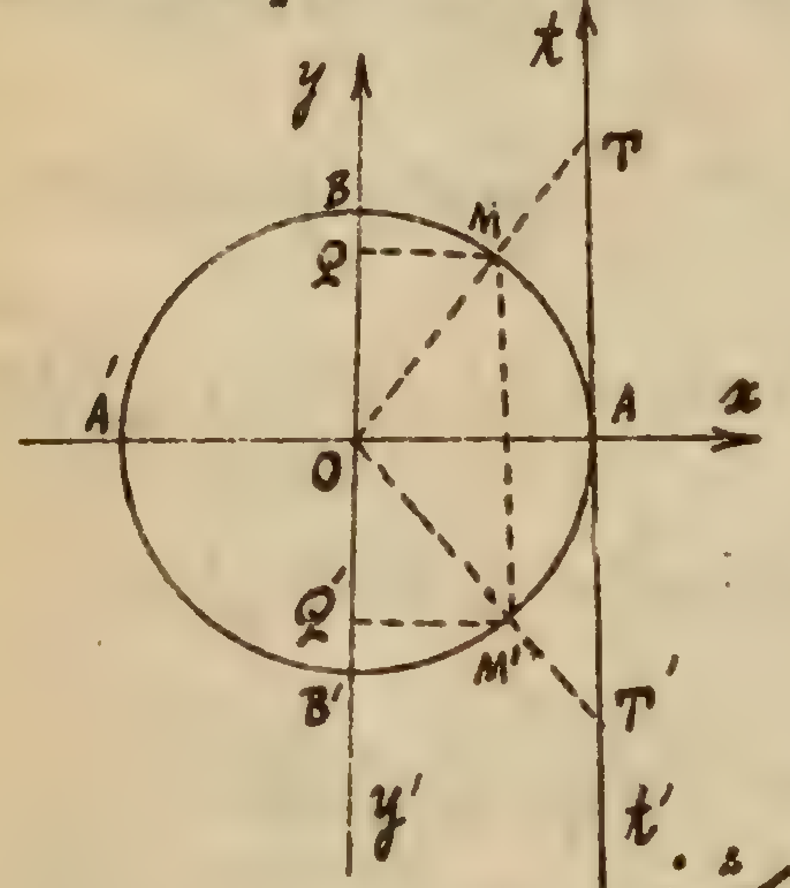
چنانکه ملاحظه میشود باستثنای $\cot x = \frac{1}{tg\, x}$ و $\operatorname{cosec} x = \pm \frac{\sqrt{1+tg^2 x}}{tg\, x}$

ظل تمام برای سایر خطوط دو مقدار قرینه نتیجه میشود

تبصره- مسئله فوق را بوجوه هندسی نیز میتوان حل نمود

ب- روابط بین خطوط مثلثاتی قوسهای قرینه و مکمل و متمم و غیره

۳۰- قضیه- دو قوس قرینه دارای یک جیب تمام‌اند ولی جیب و ظلشان مساوی و مختلف العلامه است

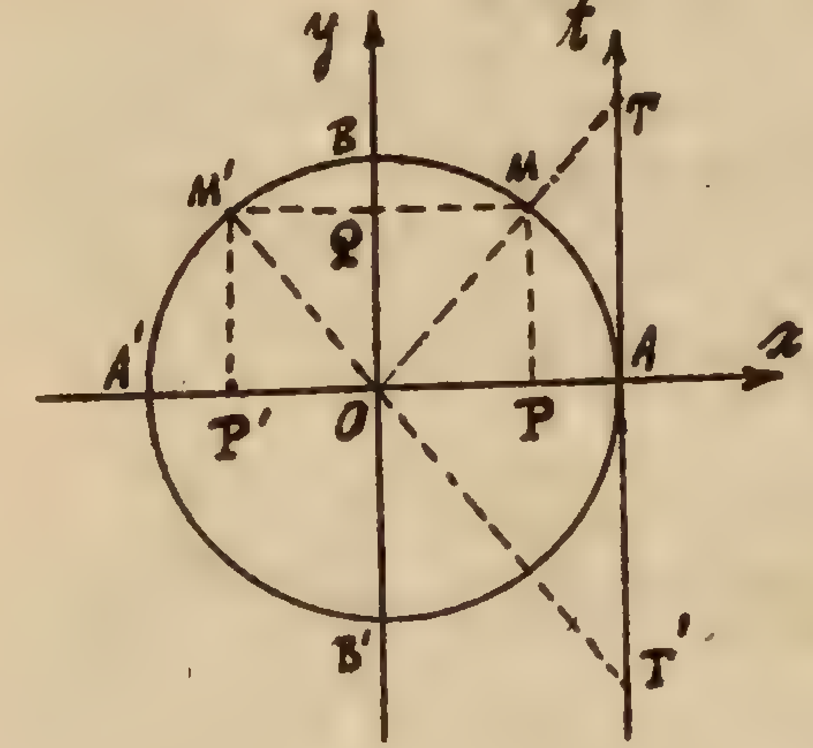


چون دو انتهای قوس‌های قرینه $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ نسبت بقطر AA' قرینه‌اند (نمره ۵) لذا نقاط Q و Q' و همچنین M و M' نسبت باین قطر قرینه یکدیگر میباشند پس:

$$(۱۷)\quad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \\ tg(-x) = -tg\, x \end{cases}$$

بوسیله این روابط با ملاحظه دستگاه R معلوم میشود که دو قوس قرینه دارای یک قطر ظلند ولی قطر ظل تمام و ظل تمامشان مساوی و مختلف العلامه است

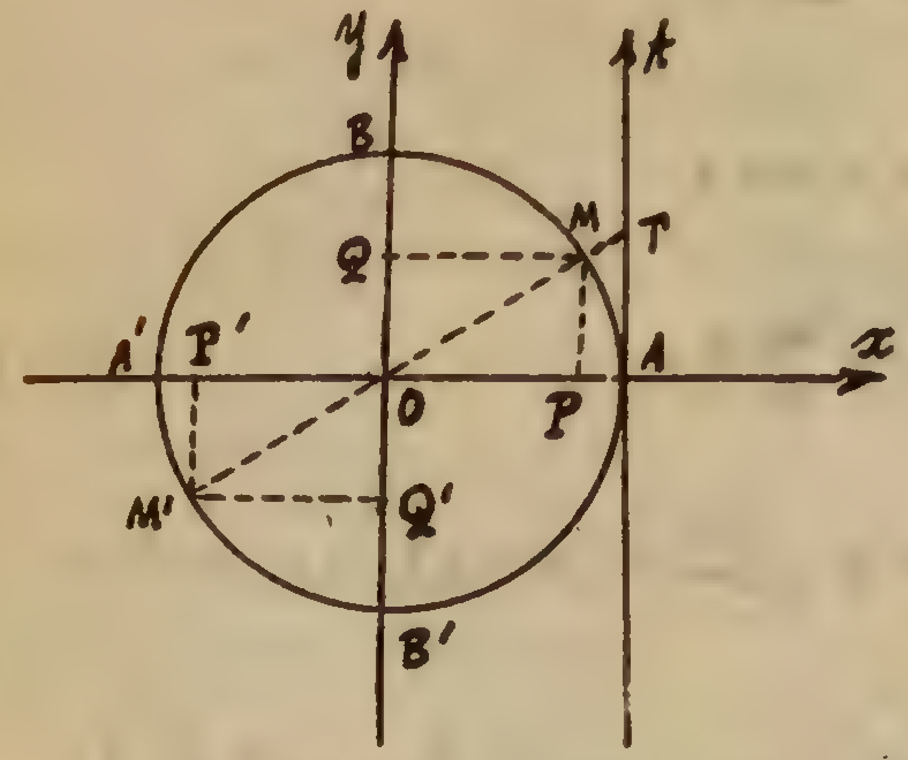
۳۱- قضیه- دو قوس مکمل دارای یک جیبند ولی جیب تمام و ظلشان مساوی و مختلف العلامه است



دو انتهای قوسهای مکمل AM و AM' نسبت بقطر BB' قرینه میباشند (نمره ۷) لذا بسهولت معلوم میشود که نقاط P و P' نسبت باین قطر و نقاط T و T' نسبت بقطر AA' قرینه میباشند پس:

$$(۱۸)\quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \\ tg(\pi - x) = -tg\, x \end{cases}$$

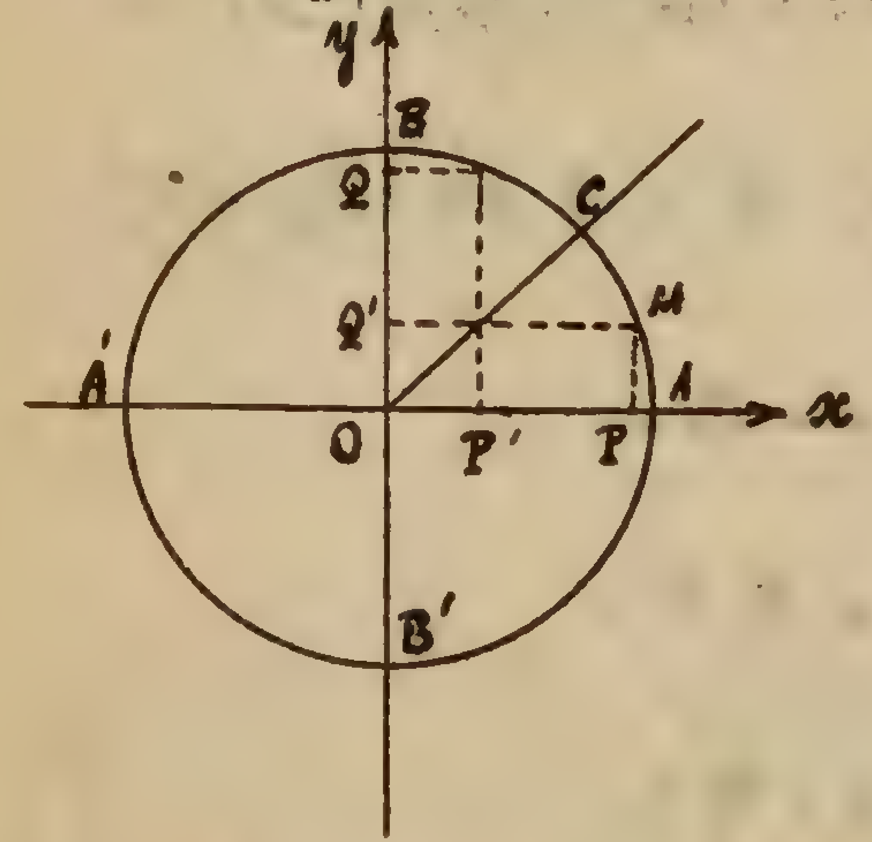
۳۲- قضیه- دو قوس که اختلافشان نصف محیط دایره باشد دارای یک ظل‌اند جیب وجیب تمامشان مساوی و مختلف العلامه است



موافق (نمرهٔ ۸) انتهای این دو قوس نسبت بمرکز دایره قرینه‌اند پس ظل هر دو قوس حامل $\widehat{AM}$ میباشد ولی چون نقاط P و P' وهمچنین Q و Q' نسبت بمرکز دایره قرینه‌اند لذا

$$(19)\quad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

۳۳- قضیه- هرگاه دو قوس متمم یکدیگر باشند جیب یکی جیب تمام دیگری وظلش ظل تمام دیگری است



دو قوس $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ متمم یکدیگرند لذا مجموعشان $\frac{\pi}{2}$ ونصف مجموعشان $\frac{\pi}{4}$ است پس قوس $\widehat{AC} = \frac{\pi}{4}$ واسطه

حدی دو قوس متمم بوده وانتهایش وسط قوس $\widehat{MM'}$ میباشد حال اگر شکل را حول OC منصف الزاویه ربع اول دوران دهیم تا شعاع OB بر OA قرار گیرد چون نقطه M' بر M منطبق میشود لذا خط M'Q' بر MP واقع میگردد واز اینجا نتیجه میشود که

$\overline{PM} = \overline{Q'M'}$ و $\overline{OP} = \overline{OQ'}$ ولذا

$$(20)\quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x \end{cases}$$

۳۴- تبصرهٔ ۱- از روابط (۲۰) معلوم میشود که جیب تمام وظل تمام وقطر ظل تمام هر قوس عبارت از جیب وظل وقطر ظل متمم این قوسند ووجه تسمیه آنها بمناسبت همین خاصیت است چنانکه cosinus - Cs عبارت از اختصار جیب متمم است

۳۵- تبصره ۲- بوسیلهٔ روابط فوق میتوان روابطی بین خطوط مثلثاتی دو قوس که اختلافشان $\frac{\pi}{2}$ باشد برقرار نمود

میدانیم که دو قوس $-x$ و $\frac{\pi}{2}+x$ متمم یکدیگرند لذا :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(-x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(-x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cot(-x)$$

با ملاحظه روابط (۱۷) نتیجه میشود :

$$(۲۱)\quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x \end{cases}$$

۳۶- مسئله - مطلوبست تحویل قوسی بربع اول

چنانکه بعد خواهیم دید در حل مسائل عملی مجبوریم که بوسیله جداول لگاریتمی که شامل خطوط مثلثاتی قوسهای بین صفر و ۹۰ درجه است خطوط مثلثاتی هر قوسی را حساب کنیم پس مقصود از حل مسئله فوق آنست که بفرض معلوم بودن قوس α قوسی محصور بین صفر و ۹۰ درجه تعیین کنیم که برحسب مقدار مطلق خطوط مثلثاتی آن با خطوط مثلثاتی قوس α مساوی باشد در اینصورت با رعایت علامت خطوط مثلثاتی قوس α بدست میآید

فرض میکنیم α اندازهٔ قوسی برحسب رادیان باشد برای تحویل این قوس بقوسی واقع در ربع اول ابتدا آنقدر مضرب 2π از α نقصان و یا بر آن اضافه میکنیم تا حاصل قوسی باشد

α واقع بین صفر و 2π شود واضح است که خطوط مثلثاتی دو قوس a و α مساویند حال اگر

اولاً $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ باشد قوس α جواب مسئله است

ثانیاً $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ در اینصورت مکمل این قوس جواب مسئله میباشد

ثالثاً $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ در اینحال $\alpha-\pi$ قوسی است واقع در ربع اول.

رابعاً $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ در اینصورت قوس $2\pi-\alpha$ جواب مسئله است

مثال ۱- قوس $\frac{17\pi}{4}$ را بربع اول تحویل کنید-

$\frac{17\pi}{4}=4\pi+\frac{5\pi}{4}$ قوس $\frac{5\pi}{4}$ بین $\frac{3\pi}{2}$ و 2π واقع است پس قوس $\frac{\pi}{4}=2\pi-\frac{5\pi}{4}$ جواب مسئله میباشد در اینحال $\cos\frac{17\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ و

$$\sin\frac{17\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \tan\frac{17\pi}{4}=-\tan\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲- قوس ۵۰۰- درجه را بربع اول تحویل کنید

$-500^\circ=-720^\circ+220^\circ$ و چون $180^\circ<220^\circ<270^\circ$ لذا قوس $220^\circ-180^\circ=40^\circ$

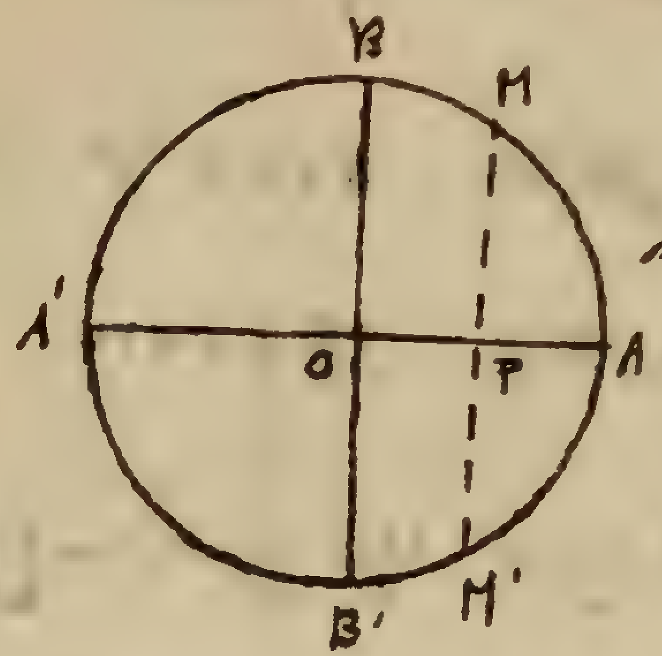
جواب مسئله است پس : $\cos(-500^\circ)=-\cos 40^\circ$ و $\sin(-500^\circ)=-\sin 40^\circ$ و

$$\tan(-500^\circ)=\tan 40^\circ$$

۳۷- محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{\pi}{n}$ - اگر بتوانیم کثیرالاضلاع منتظمی که شامل n ضلع باشد در دایره محاط کنیم در اینصورت بوسیلهٔ قضیه ذیل و نتیجه آن میتوان خطوط مثلثاتی

قوس $p\frac{\pi}{n}$ را که در آن n و p اعدادی صحیحند حساب نمود

۳۸- **قضیه** - در دایره مثلثاتی جیب قوس محصور بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ مساوی نصف وتر قوس مضاعف آنست -



چون عمود MP را امتداد دهیم محیط دایره را در نقطه M' قرینه نقطه M قطع میکند لذا :

$$\sin \widehat{AM} = \overline{PM} = \frac{M'M}{2}$$

۳۹- **نتیجه** - جیب قوس $\frac{\pi}{n}$ مساوی نصف ضلع کثیرالاضلاع منتظم n ضلعی محاطی است

وبطور کلی جیب قوس $p\frac{\pi}{n}$ (p عددی است صحیح متباین با n و کوچکتر از $\frac{n}{2}$) مساوی نصف ضلع کثیرالاضلاع منتظم کوکبی است که دارای n ضلع بوده وهر وتر شامل p قوس از محیط دایره باشد

۴۰- **موارد استعمال** - **محاسبه خطوط مثلثاتی بعضی از قوسها**

۱- در دایره مثلثاتی ضلع مربع محاطی ($n = 4$) مساوی $\sqrt{2}$ است لذا $\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بوسیله دستگاه R معلوم میشود که $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (چون انتهای قوس $\frac{\pi}{4}$ در ربع اول است لذا خطوط مثلثاتی آن مثبت میباشد)

و $\tan\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$

۲- ضلع مثلث منتظم محاطی ($n = 3$) در دایره بشعاع واحد مساوی $\sqrt{3}$ است لذا $\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و از آنجا $\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ و

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

۳- ضلع مسدس منتظم محاطی ($n = 6$) در دایره مثلثاتی برابر واحد است پس $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و از آنجا $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۴- اندازه ضلع معشر محاطی ($n = 10$) در دایره مثلثاتی مساوی $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ است پس

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

واندازه ضلع معشر کوکبی ($n = 10$ و $p = 3$) برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است پس

$$\sin\frac{3\pi}{10} = \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

۵- اندازه ضلع مخمس منتظم ($n = 5$) در دایره مثلثاتی مساوی $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ است لذا : $\sin\frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

وضلع مخمس کوکبی ($n = 5$ و $p = 2$) بطول $\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ میباشد پس :

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

تبصره - قوسهای $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$ و همچنین $\frac{\pi}{10}$ و $\frac{2\pi}{5}$ و همچنین $\frac{3\pi}{10}$ و $\frac{\pi}{5}$ متمم یکدیگرند لذا میتوان خطوط مثلثاتی یکی را بوسیله معلوم بودن خطوط مثلثاتی قوس متمم دیگر حساب نمود

پس $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ و $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

خلاصهٔ مطالب فوق را میتوان از جدول ذیل استنباط نمود.

	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
tag	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

ج - منعکس خطوط مثلثاتی

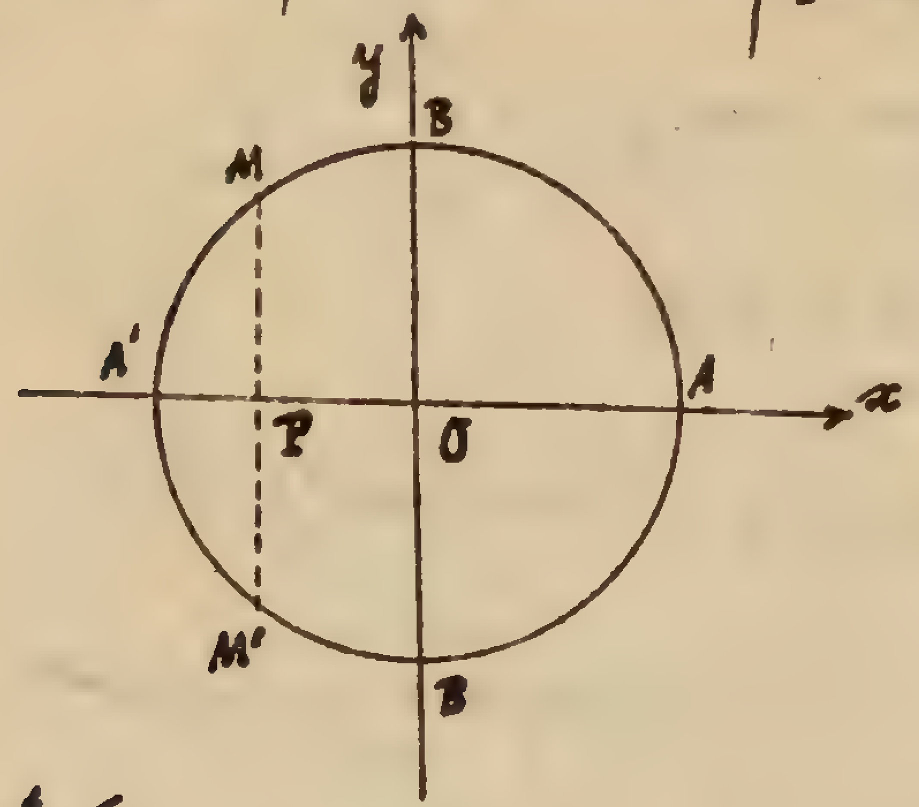
۴۱ - **مسئله کلی** - مطلوبست تعیین قوسهائیکه یکی از خطوط مثلثاتی آن معلوم باشد

حل این مسئله بدو قسمت تقسیم میشود :

اولاً تعیین قوسی که جواب مسئله باشد (در این مبحث فقط بحل هندسی آن اکتفا میشود)

ثانیاً تعیین سایر قوسها

۴۲ - **منعکس جیب تمام** - فرض میکنیم $-1 < a < 1$ جیب تمام قوس x باشد



برای تعیین این قوس بر محور جیب تمام حامل $\overline{OP}$ را برابر a جدا نموده از انتهای P عمود MM' را بر قطر AA' اخراج میکنیم قوسهای بمبداء A که بنقاط M و M' منتهی شده اند جواب مسئله میباشند فرض میکنیم α یکی از اندازه های قوس AM باشد لذا اندازه قوس AM' مساوی $-\alpha + 2k\pi$ است پس کلیهٔ اندازه های قوس مجهول x که بدو نقطه M و M' منتهی شده اند چنین است $x = \pm\alpha + 2k\pi$ (قوس x را:

به $\arccos a$ یعنی قوسی که جیب تمامش a است مینمایند)

از رابطهٔ فوق با مراجعه بنمرات (۴) و (۵) نتیجه ذیل حاصل میشود:

شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس دارای یک جیب تمام باشند آنستکه مجموع یا تفاضل اندازه‌های این دو قوس مضرب صحیح (مثبت یا منفی یا صفر) زوج π باشد

مثال - مطلوبست حل معادله $\cos(4x + 30°) = \cos(60° - 2x)$

برای اینکه دو قوس $(60° - 2x)$ و $(4x + 30°)$ دارای یک جیب تمام باشند باید:

$$60 - 2x + 4x + 30 = 360.K$$

و یا

$$60 - 2x - 4x - 30 = 360.K$$

از معادلهٔ اول نتیجه میشود $x = -45° + 180° \times K$ در اینحال انتهای قوسهای x بر طرفین منصف الزاویهٔ ربع دوم و چهارم قرار دارند

از معادلهٔ دوم حاصل میشود $x = 5° + 60° \times K$ حال اگر K مضارب ۶ را اختیار کند انتهای قوس x تغییر نمیکند و چون به K مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ داده شود انتهای قوسهای x بر رئوس شش ضلعی منتظم محاطی که یک رأسش از مبدأ A بفاصله ۵ درجه واقع است قرار خواهند گرفت

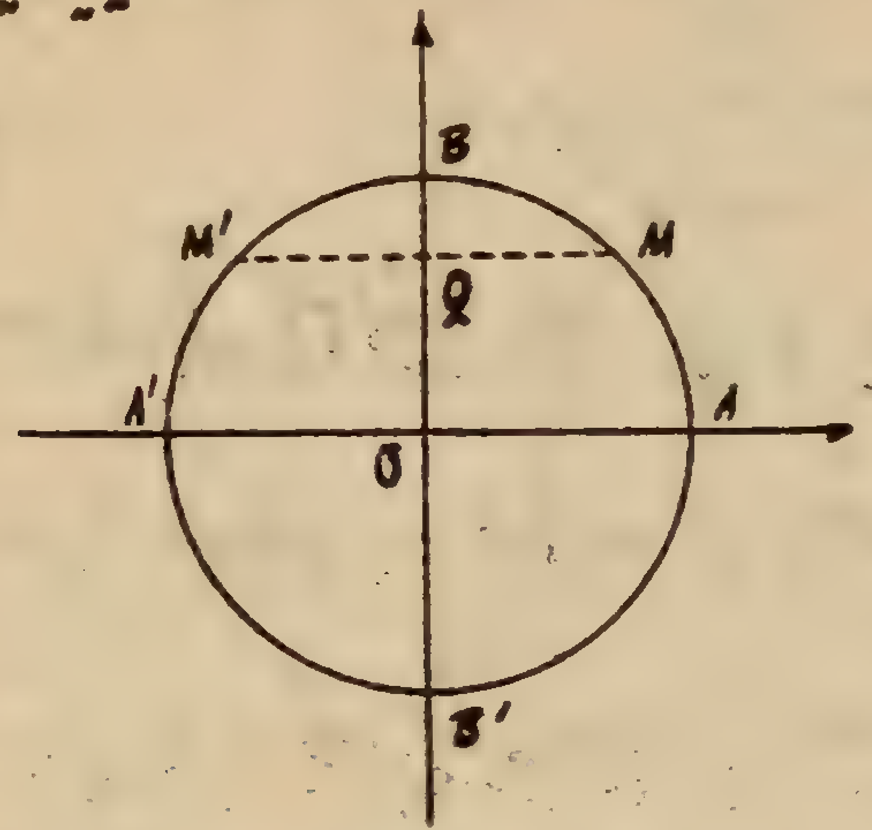
۴۳- حالات خاص - اگر $\cos x = 1$ باشد انتهای قوسهای x بر مبدأ A واقع میباشند

دراینصورت $\arccos 1 = 2K\pi$

اگر $\cos x = -1$ باشد انتهای قوسهای x بر نقطه A' قرار خواهند داشت دراینحال

$$\arccos -1 = (2K + 1)\pi$$

۴۴- منعکس جیب - اگر $-1 < a < 1$ جیب قوس x باشد برای تعیین این قوس



از محور BB' حامل $\overline{OQ}$ را برابر a جدا نموده و از انتهای Q عمود MM' را بر قطر BB' اخراج مینمائیم فرض میکنیم α یکی از اندازه‌های قوس $\overset{\frown}{AM}$ باشد لذا اندازه قوس AM' چنین میشود $\pi - \alpha$

پس کلیه قوسهائی که جیبشان $\overline{OQ}$ است چنین اند:

$$\arcsin a = \alpha + 2K\pi$$

$$\arcsin a = \pi - \alpha + 2K\pi$$

لذا نتیجه ذیل حاصل میشود:

شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس دارای یک جیب باشند آنستکه تفاضلشان مضرب زوج π و یا مجموعشان مضرب فرد π باشد

مثال - مطلوبست حل معادله $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$

برای اینکه دو قوس x و $\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ دارای یک جیب باشند باید:

$$4x - \frac{\pi}{3} - x = 2K\pi$$

و یا

$$4x - \frac{\pi}{3} + x = \pi + 2K\pi$$

از معادلهٔ اول حاصل میشود $x = \frac{\pi}{9} + K\cdot\frac{2\pi}{3}$ دراینصورت اگر K مضرب ۳ باشد انتهای قوسهای x تغییر نمیکند و چون مقادیر ۰ و ۱ و ۲ را اختیار نماید انتهای قوسهای x بر رؤس مثلث متساوی الأضلاع محاطی که رأس آن از مبداء بفاصلهٔ $\frac{\pi}{9}$ است واقع میشوند

از معادله دوم نتیجه میشود $x = \frac{4\pi}{15} + K\cdot\frac{2\pi}{5}$ دراینصورت بسهولت معلوم میشود که انتهای قوسهای x بر رؤس مخمس منتظمی واقع خواهند بود

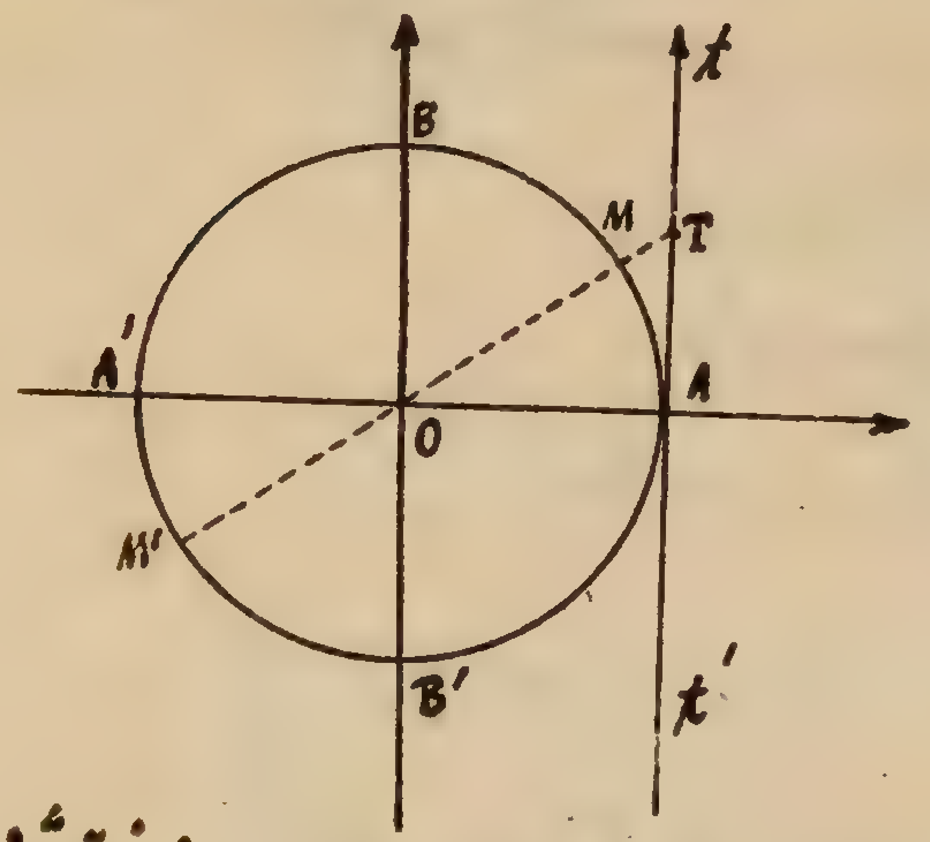
۴۵ - **حالات خاص** - اگر $\sin x = 1$ باشد انتهای قوسهای x بر نقطه B واقع میشود دراینصورت

$$\text{arc}\sin(+1) = +\frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

اگر $\sin x = -1$ باشد انتهای قوسهای x بر نقطه B' قرار میگیرند دراینحال

$$\text{arc}\sin(-1) = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

۴۶ - **منعکس ظل** - فرض میکنیم مطلوب حل معادله $\text{tg}\,x = a$ باشد از نقطه A بر محور ظل قطعه $\overline{AT}$ را برابر a جدا نموده نقطه T را بمرکز دایره وصل میکنیم و فرض مینمائیم نقاط M و M' محل تقاطع این خط با محیط دایره باشد کلیه



قوسهائیکه بنقاط M یا M' منتهی شده باشند ظلشان AT است حال اگر α یکی از اندازه‌های قوس $\widehat{AM}$ باشد کلیه اندازه‌های قوسهای $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ از رابطهٔ ذیل معلوم میشود $\text{arc tg}\,a = \alpha + K\pi$ پس چنین نتیجه میشود

شرط لازم و کافی برای اینکه دو قوس دارای یک ظل باشند آنستکه تفاضلشان مضرب صحیح π باشد

مثال - مطلوبست حل معادلهٔ $\text{tg}(7x + 12) = \text{tg}(3x + 52)$ (گراد)

از این معادله نتیجه میشود $7x + 12 - 3x - 52 = K\cdot 200$ جواب این معادله

$x = 10^{gr} + K\cdot 50^{gr}$ میباشد

حال اگر K مضرب ۸ باشد انتهای قوس x ثابت میماند ولی اگر بترتیب مقادیر صحیح از صفر تا ۷ را اختیار کند انتهای قوسهای x بر رؤس ۸ ضلعی منتظم محاطی که یک رأس آن بفاصله ۱۰ گراد از مبدء A واقع است قرار خواهند داشت

تمرینات

۱۷- جیب قوسی مساوی $\frac{4}{5}$ است مطلوبست محاسبهٔ سایر خطوط مثلثاتی آن

۱۸- مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسی که اولاً جیب و ثانیاً قطر ظل آن معلوم باشد

۱۹- ثابت کنید که عبارات

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

و $$2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$$

و $$\sin^4 x(3 - 2\sin^2 x) + \cos^4 x(3 - 2\cos^2 x)$$

بمقدار x بستگی ندارند

۲۰- در مثلث ABC ظل زاویهٔ A مساوی $-\frac{3}{4}$ است مطلوبست محاسبه جیب و جیب تمام این زاویه

۲۱- هرگاه x زاویهٔ حاده و a و b دو عدد مثبت باشند مطلوبست محاسبه $\cos x$ و $\tan x$ درصورتیکه

$$\sin x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

۲۲- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} - \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\cot^2 x \cdot \cos^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x$$

$$\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \cdot \tan y$$

$$\sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \cot^2 x \cot^2 y - 1$$

۲۳- x زاویه‌ایست حاده و مثبت a و b دو عدد جبری میباشند مطلوبست محاسبه عبارت $\frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$ درصورتیکه $\tan x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

۲۴- مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای $5\pi + x$ و $\frac{3\pi}{2} + x$ و $x - \frac{\pi}{2}$ و $\frac{7\pi}{2} + x$ برحسب خطوط مثلثاتی قوس

۲۵- قوسهای $213^\circ 20'$ و $(105^\circ 23' 12'')$ - وهمچنین قوسهای $22\frac{\pi}{3}$ و -3 و $\frac{355}{113}$ را بربع اول تحویل کنید

۲۶- منحنی‌های نمایش تغییرات جیب و جیب تمام نسبت بیک دستگاه مختصات رسم شده است اولاً مطلوبست مختصات نقاط تقاطع این دو منحنی ثانیاً ثابت کنید که میتوان بوسیلهٔ یک حرکت انتقالی این دو منحنی را بر هم منطبق نمود

۲۷- خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{\pi}{16}$ و $\frac{\pi}{15}$ و $\frac{2\pi}{15}$ و $\frac{4\pi}{15}$ و $\frac{7\pi}{15}$ را حساب کنید

۲۸- در دایرهٔ مثلثاتی نقاط M و M' انتهای قوسهای متحد المبدا a و b میباشند میدانیم که وتر MM' از حیث طول برابر قدر مطلق $2\sin\frac{a-b}{2}$ است ثابت کنید

که $\overline{MN}^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$

و از این تساوی صحت روابط ذیل را تحقیق کنید :

$$1 - 2\sin^2\frac{a-b}{2} = \cos a\cos b + \sin a \sin b$$

$$1 - 2\sin^2\frac{a}{2} = \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

۲۹- مطلوبست تعیین قوسهائیکه جیب تمامشان بترتیب مساوی جیب تمام قوسهای ذیل باشد

200° و $-60^{\text{گراد}}$ و $\frac{11\pi}{6}$

۳۰- مطلوبست تعیین قوسهائیکه جیبشان بترتیب مساوی جیب قوسهای ذیل باشد 510°

و $550^{\text{گراد}}$ و $\frac{5\pi}{4}$

۳۱- مطلوبست تعیین قوسهائیکه ظلشان بترتیب مساوی ظل قوسهای ذیل باشد 510°

و $-120^{\text{گراد}}$ و $\frac{11\pi}{6}$

۳۲- اعداد صفر و $-\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و ۱- مفروضند مطلوبست تعیین قوسهائیکه اعداد فوق اولاً جیب تمام ثانیاً جیب آن باشد

۳۳- اعداد صفر و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و ۱- و $\sqrt{3}$ مفروضند مطلوبست تعیین قوسهائیکه اعداد فوق اولاً ظل ثانیاً ظل تمام آنها باشد

۳۴- هرگاه x یکی از ریشه های معادله $\operatorname{tg} x = a$ باشد مطلوبست وضع انتهای قوسهای ma و $\frac{x}{n}$ (هرگاه m و n اعدادی صحیح باشند)

۳۵- مسئله فوق هرگاه x ریشه معادله $\sin x = a$ باشد

۳۶- اگر در مثلث ABC رابطه $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1$ برقرار باشد نوع مثلث را معلوم کنید

۳۷- مطلوبست حل معادلات ذیل :

$$\cos x = -\cos 80^{gr} \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{cotg} a$$

$$\sin(ax+b) = \sin(cx+d)$$

$$\operatorname{tg}\frac{x+a}{x-a} = \operatorname{tg}\frac{x+b}{x-b} \qquad \begin{cases}\cos 2x + \sin x = 0\\ -200^\circ < x < 100^\circ\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin \pi(x^2 - 3x + 1) = \sin \pi(x^2+2)\\ -1 < x < 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\operatorname{tg} \pi(x^2+1) = \operatorname{tg} \pi x\\ -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1 \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{cotg} x$$

۳۸- دستگاههای ذیل را حل کنید :

$$\begin{cases}\sin x = \sin 2y\\ \cos x = \sin y\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x + \cos(\frac{\pi}{3} + y) = 0\\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(x-y) = \frac{1}{2}\\ \cos(x-y) = \frac{1}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}\sin(x+y) = \cos(x-y)\\ \operatorname{tg}(3x+2y-7) = \operatorname{cotg}\frac{3-5y}{m}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(x-y) = \sin(x+y-1)\\ \operatorname{tg}(3x-y) = \operatorname{cotg}\frac{2x+7y}{m}\end{cases}$$

۳۹- اگر m عدد مثبت باشد ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر مثبت x روابط ذیل برقرار است

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \text{arc cos}\sqrt{\frac{a}{x+a}}$$

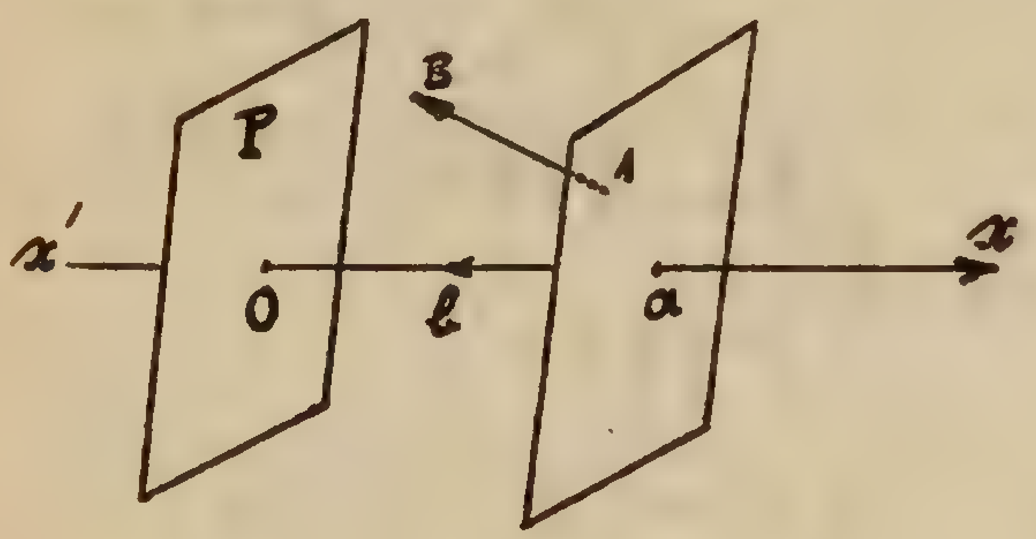
$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$\text{arc tg}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \text{arc sin}\sqrt{\frac{x-a}{2x}}$$

فصل چهارم - جمع قوسها

۱- تصاویر

۴۷- **تعریف** - صفحهٔ P و محور $x'x$ غیرموازی با آن مفروض است بر نقطهٔ فضائی A صفحهٔ بموازات صفحه P مرور میدهیم نقطه a محل تقاطع این صفحه با محور مفروض را تصویر نقطه A گویند



تصویر اسم حامل بر هر محور حاملی است که مبداءاش تصویر مبداء حامل مفروض و منتهایش تصویر انتهای آن باشد تصویر حامل (AB) را بر محور چنین نویسند $\text{proj}_{x'x}^{(AB)} = \overline{ab}$

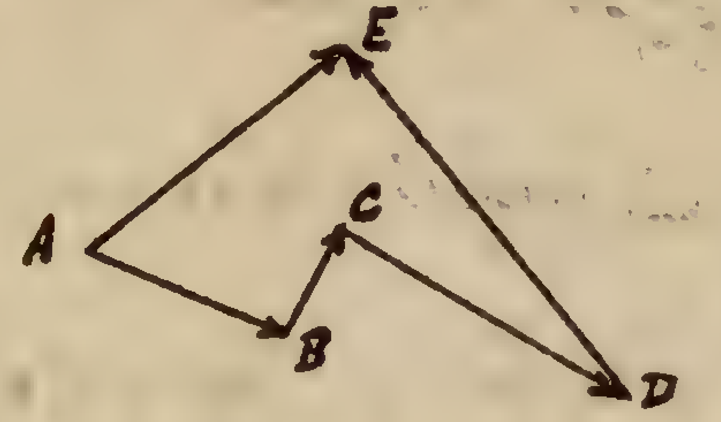
درصورتیکه حامل تصویر در جهت مثبت محور و یا در خلاف جهت آن باشد جهت آن مثبت و یا

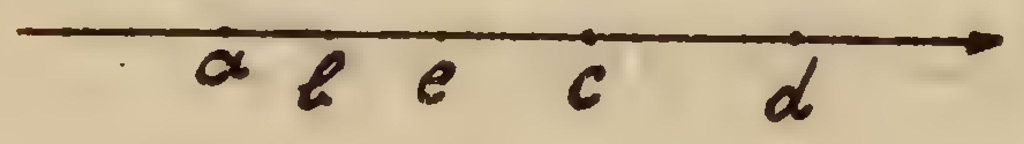
منفی خواهد بود و بطوریکه تصویر هر حامل بر محور کمیتی است جبری و بنابراین با اعداد جبری اندازه گرفته میشود

اگر صفحه P عمود بر محور مفروض باشد تصویر را قائم خوانند

۴۸- **قضیه** - چون چندین حامل را بر یک محور تصویر کنیم مجموع جبری این تصاویر مساوی تصویر منتجهٔ حاملها است

از نقطهٔ غیر مشخص A حاملهای AB و BC و CD و DE را بهمگک حاملهای مفروض رسم میکنیم میدانیم که حامل AE منتجهٔ حاملهای مفروض خواهد بود اگر نقاط a و b و c و d و e بترتیب





تصاویر نقاط A و B و C و D و E بر محور $x'x$ باشند بموجب قضیه مثال نتیجه میشود :

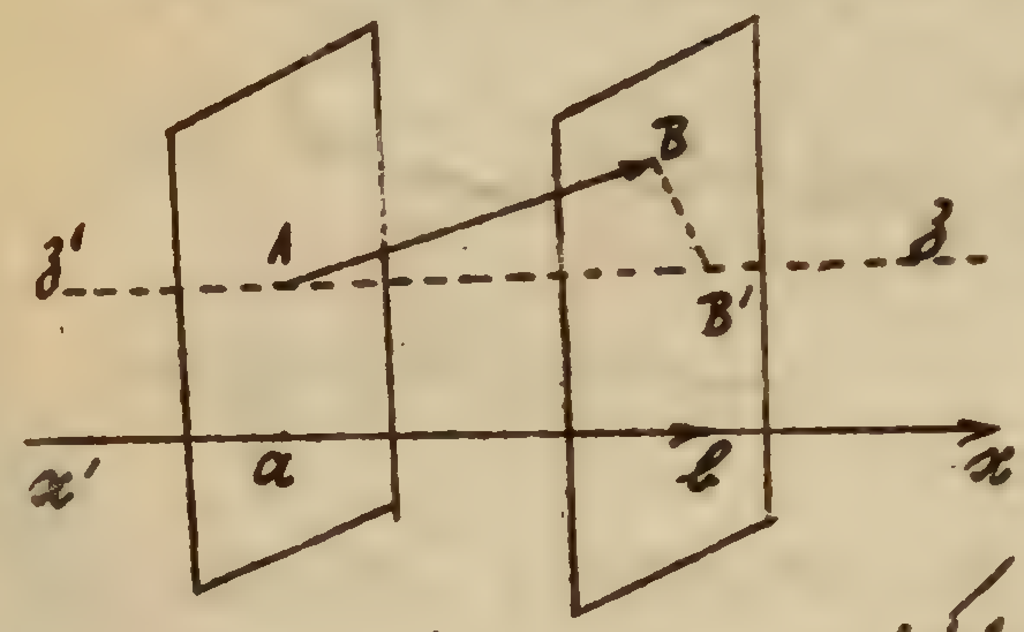
$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ea} = 0$$ و یا :

$$\overline{ae} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de}$$ و چون حامل $\overline{ae}$ تصویر منتجه است لذا

حکم محقق میباشد

۴۹ - **قضیه** - چون حاملی بطول ۱+ را بر سه محور قائماً تصویر کنیم اندازه تصویر مساوی جیب تمام زاویهٔ حادث بین جهت مثبت حامل و امتداد مثبت محور میباشد -

فرض میکنیم حامل (AB) بطول



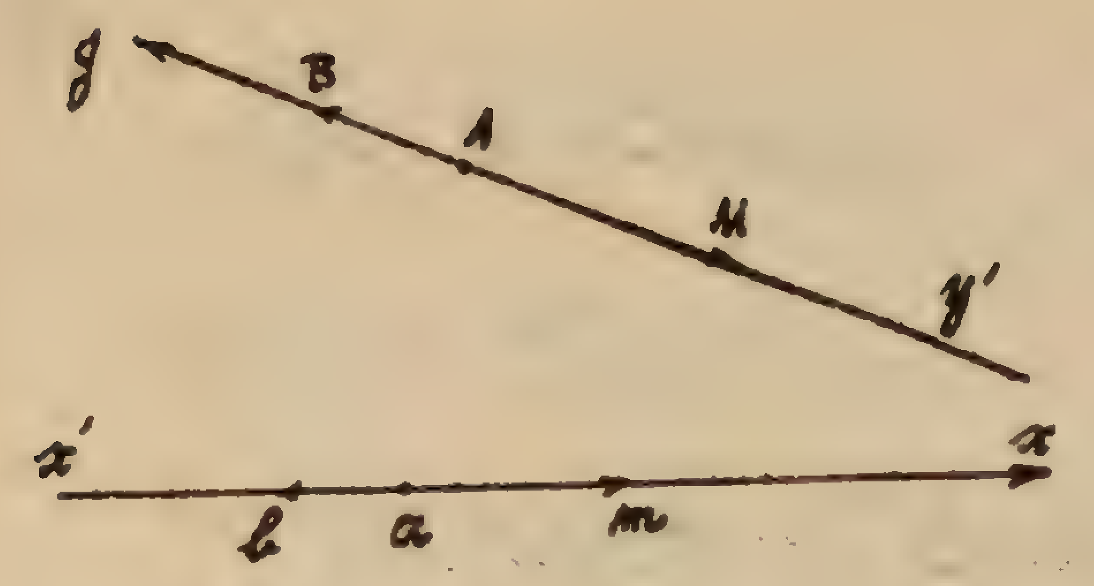
واحد و تصویرش بر محور $x'x$ حامل $\overline{ab}$ باشد از نقطه A خط $z'z$ را بموازات محور $x'x$ رسم میکنیم

زاویهٔ $\widehat{z'AB} = \alpha$ زاویهٔ حادث بین دو جهت مثبت حامل و محور $x'x$ میباشد

چون $\overline{AB'} = \cos\alpha$ و $\overline{ab} = \overline{AB'}$ پس $\overline{ab} = \cos\alpha$

۵۰ - **نتیجه** - چون حاملی را بر محور معلوم الجهتی فرض کنیم تصویر قائم این حامل بر هر محور مساوی است با اندازهٔ جبری حامل در جیب تمام زاویهٔ حادث بین جهت مثبت محور و جهت مثبت محل حامل

فرض میکنیم محور $y'y$ محل حامل (AM) باشد بر محور $y'y$ حامل $\overline{AB}$ را بطول ۱+ جدا نموده اگر تصاویر قائم حاملهای $\overline{AM}$ و $\overline{AB}$ بر محور $x'x$ بترتیب حاملهای



$\overline{am}$ و $\overline{ab}$ باشد چنین نتیجه میشود

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{am}}{\overline{ab}}$$

و چون $\overline{ab} = \cos\alpha$ و $\overline{AB} = +1$ لذا $\overline{am} = \overline{AM}\cos\alpha$

و نیز میتوان نتیجه فوق را چنین بیان نمود:

تصویر قائم هر حامل بر هر محور مساوی است با طول حامل مفروض در جیب تمام زاویهٔ حادث بین جهت مثبت حامل و امتداد مثبت محور

ب - جمع قوسها

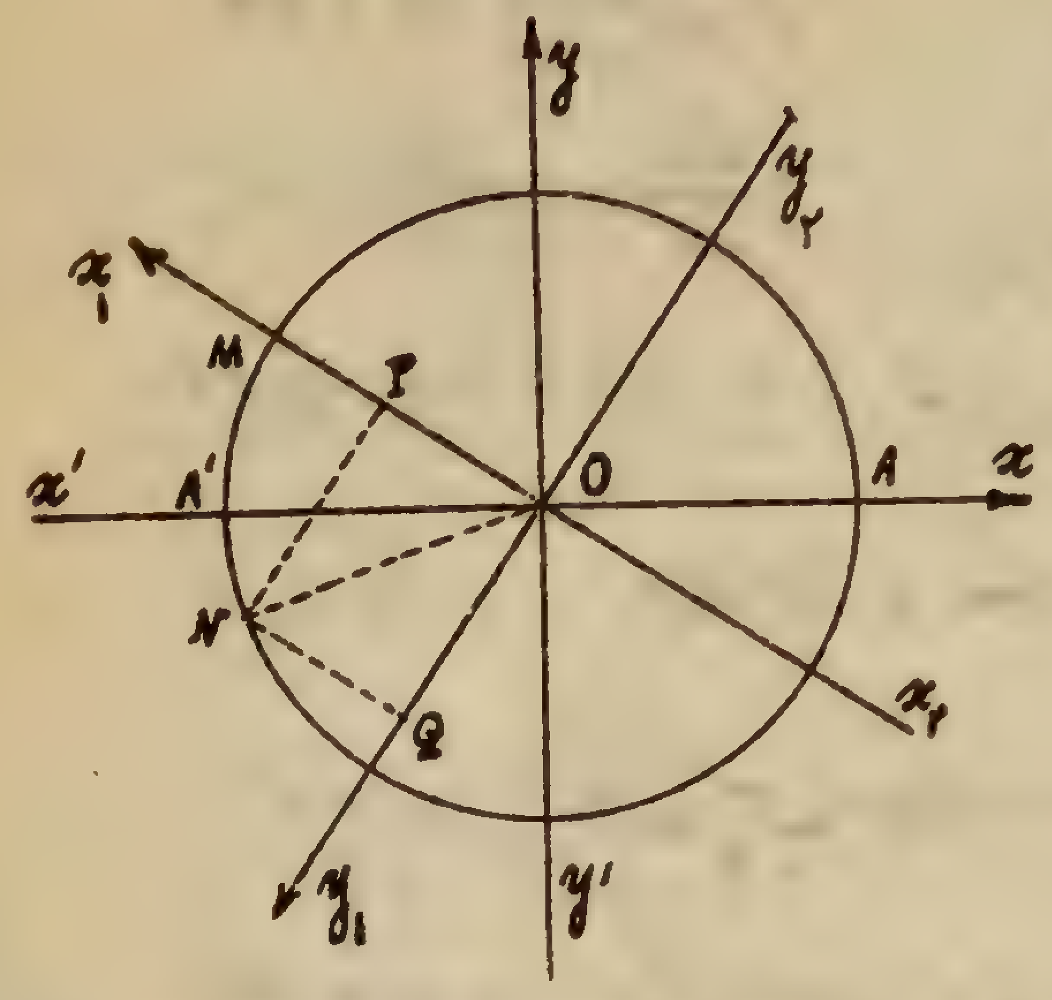
مسئله اصلی - خطوط مثلثاتی چندین قوس معلوم است مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی مجموع جبری این قوسها

۵۱ - **اولاً محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس** $(a+b)$ - ۱ - محاسبه $\cos(a+b)$

بر محیط دایرهٔ مثلثاتی از مبداء A قوس $\overset{\frown}{AM}$ را مساوی a و از مبداء M قوس $\overset{\frown}{MN}$ را برابر b جدا مینمائیم بنابراین اندازهٔ قوس $\overset{\frown}{AN}$ مساوی $a+b$ است

محور x_1x_2 منطبق بر OM که جهت مثبتش از O بسمت M است محور جیب تمام

قوسهای مبداء M میباشد و محور y_2y_1 عمود بر x_2x_1 محور جیب این قوسهاست پس چون نقطه N را بر دو محور x_2x_1 و y_2y_1 تصویر کنیم بنا بتعریف نتیجه میشود



$\overline{OP} = \cos b$ و $\sin b = \overline{OQ}$ حال میتوان (ON) را مجموع هندسی دو حامل (OP) و (PN) قرار داده چنین نوشت $(ON)=(OP)+(PN)$ لذا بنا بقضیهٔ تصاویر نتیجه میشود

$$\text{proj}_{x'x}^{(ON)} = \text{proj}_{x'x}^{(OP)} + \text{proj}_{x'x}^{(PN)} \quad (۱)$$

و چون ملاحظه کنیم که

$$\text{proj}_{x'x}^{(ON)} = \cos(a+b)$$

$$\text{proj}_{x'x}^{(OP)} = \overline{OP}\cos(\widehat{x'x, x_2x_1}) = \cos b \cos a$$

$$\text{proj}_{x'x}^{(PN)} = \overline{PN}\cos(\widehat{x'x, y_2y_1}) = \sin b \cos(a+\tfrac{\pi}{2})$$

$$= -\sin b \sin a$$

لذا رابطهٔ (۱) چنین میشود

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (۲۲)$$

۲- محاسبهٔ $\sin(a+b)$ - از تصویر شعاع ON بر محور $y'y$ نتیجه میشود

$$\text{proj}_{y'y}^{(ON)} = \text{p}_{y'y}^{(OP)} + \text{p}_{y'y}^{(PN)} \quad (۲)$$

و چون

$$\text{proj}_{y'y}^{(OP)} = \overline{OP}\cos(\widehat{y'y, x_2x_1}) = \cos b \cos(a-\tfrac{\pi}{2}) = \cos b \sin a$$

و

$$\text{proj}_{y'y}^{(PN)} = \overline{PN}\cos(\widehat{y'y, y_2y_1}) = \sin b \cos a$$

پس رابطهٔ (۲) چنین میشود

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (۲۳)$$

تبصره - میتوان بوسیلهٔ دستور (۲۲) رابطهٔ اخیر را استخراج نمود بدین طریق اگر دستور (۲۲) را در بارهٔ دو قوس b و $\frac{\pi}{2}+a$ اعمال کنیم نتیجه میشود :

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}+a+b) = \cos(\tfrac{\pi}{2}+a)\cos b - \sin(\tfrac{\pi}{2}+a)\sin b$$

و چون $\cos(\frac{\pi}{2}+a+b) = -\sin(a+b)$ و $\cos(\frac{\pi}{2}+a) = -\sin a$

و $\sin(\frac{\pi}{2}+a) = \cos a$ لذا رابطهٔ فوق با تغییر علامت طرفین بصورت دستور (۲۳) در میآید

۳- محاسبهٔ $\text{tg}(a+b)$ - چون $\text{tg}(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ لذا

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

از تقسیم صورت و مخرج عامل $\cos a \cos b$ نتیجه میشود

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a\, \text{tg}\, b} \quad (۲۴)$$

۵۲- ثانیاً محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس $(a-b)$ - چون روابط (۲۲) و (۲۳)

و (۲۴) را درباره قوسهای a و $-b$ اعمال نمائیم نتیجه میشود :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$

و

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$$

و

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a . \tan(-b)}$$

و با ملاحظه دستورات (   ) حاصل میشود

$$(۲۵) \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(۲۶) \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(۲۷) \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

۵۳ - ثالثاً محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $a+b+c$ چون $a+b$ را یک قوس اختیار نموده دستورات (۲۲) و (۲۳) و (۲۴) را در آن اعمال کنیم حاصل میشود

$$\cos(a+b+c) = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c$$

$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c$$

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan(a+b) + \tan c}{1 - \tan(a+b)\tan c}$$

و چون $\cos(a+b)$ و $\sin(a+b)$ و $\tan(a+b)$ را بسط دهیم حاصل میشود :

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c -$$
$$\sin b \cos c \cos a - \sin c \cos a \cos b$$

$$\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos c \cos a +$$
$$\sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c$$

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan a \tan c}$$

۵۴ - رابعاً محاسبه خطوط مثلثاتی $\pm a \pm b \pm c$ در دستورات فوق با تبدیل a به $-a$ یا b به $-b$ یا c به $-c$ خطوط مثلثاتی قوس $\pm a \pm b \pm c$ بدست میآید

۵۵ - خامساً محاسبه خطوط مثلثاتی مجموع جبری n قوس - قوس مفروض را به دو دسته قوس تجزیه نموده دستورات سابق را در آن عمل نموده بسط میدهیم در اینصورت خطوط مثلثاتی n قوس بدست میآید

تمرینات

۲۰ - مطلوبست محاسبه عبارات $\cos(a \pm b)$ و $\sin(a \pm b)$ وقتیکه

$\cos a = \frac{3}{5}$ ، $\sin a = \frac{1}{4}$ باشد

۴۱- مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\tan(a+b)$ وقتیکه $\tan a = 1$ و $\tan b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

۴۲- مطلوبست محاسبه عبارت $\sin(a+b+c)$ درصورتیکه $\sin a = \frac{3}{5}$ و $\sin b = \frac{12}{13}$ و $\sin c = \frac{7}{25}$

۴۳- مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای ۱۵° و ۷۵° :

اولاً بوسیلهٔ روابط $15° = 45° - 30°$ و $75° = 45° + 30°$

ثانیاً بوسیله روابط $15° = 60° - 45°$ و $75° = 120° - 45°$

۴۴- مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{5} \pm \frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{8}$ و $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

۴۵- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید :

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$$

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin a\cos a - \sin b\cos b$$

$$\sin a\sin(b-c) + \sin b\sin(c-a) + \sin c\sin(a-b) = 0$$

$$\tan(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a\cos a - \sin b\cos b} \quad \times$$

$$\tan a + \tan b = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$$

$$\tan(a-b) + \tan(b-c) + \tan(c-a) = \tan(a-b)\tan(b-c)\tan(c-a)$$

۴۶- ثابت کنید که معادلات ذیل متعادلند :

$$\tan^2 c = \tan a \tan b \quad , \quad \frac{\tan(a-b)}{\tan a} + \frac{\sin^2 c}{\sin^2 a} = 1$$

۴۷- از دستگاه $\begin{vmatrix} \sin x \tan y = \tan b \\ \cos y \cot x = \cot a \end{vmatrix}$ $\cos x$ و $\sin y$ را برحسب خطوط مثلثاتی قوسهای a و b تعیین کنید

۴۸- ثابت کنید که از رابطه $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta$ میتوان رابطه $\sin^2(\alpha+\beta) = (\sin\alpha + \sin\beta)^2$ را بدست آورد

۴۹- ثابت کنید که اگر $a+b=c$ باشد رابطه ذیل محقق است :

$$\cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a\cos b\cos c = \sin^2 c$$

۵۰- مطلوبست تعیین رابطهٔ بین ظل زوایای چهارضلعی محدب.

۵۱- ثابت کنید که عبارات ذیل بمقدار x بستگی ندارند

$$\cos^2(a-x) + \cos^2 x - 2\cos a\cos x\cos(a-x)$$

$$\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\sin^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$$

۵۲- صحت روابط ذیل را ثابت کنید وقتیکه انتهای قوسها در ربع اول باشند

$$\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} = \arctan\frac{1}{2}$$

$$\arctan(3+2\sqrt{2}) - \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\frac{1}{a} + \arctan\frac{a-1}{a+1} = \frac{\pi}{4} \qquad 0 < a < 1$$

$$\arctan(a+1) - \arctan(a-1) = \operatorname{arccot}\frac{a^2}{2}$$

$$\operatorname{arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctan}\frac{1}{3}+\operatorname{arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{arctan}\frac{1}{7}+\operatorname{arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

۵۳- اگر A و B و C زوایای مثلث باشند صحت روابط ذیل را ثابت کنید :

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$2(1+\cos A\cos B\cos C)=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$$

$$\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos A\cos C+\sin C\cos A\cos B=\sin A\sin B\sin C$$

$$\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin A\sin C+\cos C\sin A\sin B=1+\cos A\cos B\cos C$$

$$\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)=3\sin A\sin B\sin C$$

۵۴- مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\frac{\sin(a+b)}{\sin(x+y)}$ وقتیکه $\tan a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\tan b=\frac{1}{\sqrt{15}}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{3}{4}}$ و $\cos y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

۵۵- اگر $\tan a$ و $\tan b$ ریشه‌های معادله $x^2+px+q=0$ باشند مطلوبست محاسبه عبارت $\sin^2(a+b)+p\sin(a+b)\cos(a+b)+q\cos^2(a+b)$ برحسب ضرایب p و q

فصل پنجم

ضرب و تقسیم قوسها

مسئلهٔ کلی - بفرض معلوم بودن خطوط مثلثاتی قوس a مطلوبست

محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس na یا $\frac{a}{n}$ (n عددی است صحیح)

۵۶- ضرب قوسها - اولاً محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $2a$ - چون در دستورات (۲۲) و (۲۳) (۲۴) b را مساوی a فرض کنیم دستورات ذیل نتیجه میشود :

(۲۸) $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=2\sin^2 a-1$

(۲۹) $\sin 2a=2\sin a\cos a$

(۳۰) $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

از رابطه فوق معلوم میشود که فقط $\cos 2a$ برحسب $\sin a$ یا $\cos a$ منطق میباشد

ثانیاً محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس $3a$ - چون در روابط خطوط مثلثاتی $a+b$ قوس b را به $2a$ تبدیل نموده و در حاصل خطوط مثلثاتی قوس $2a$ رابطه دهیم با ملاحظه $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ روابط ذیل نتیجه میشود :

(۳۱) $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

(۳۲) $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

(۳۳) $\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

ثالثاً خطوط مثلثاتی قوس na - بهمین طریق چون در روابط خطوط مثلثاتی قوس $a+b$ قوس b را مرتباً به $2a$ و $3a$ و غیره تبدیل نموده خطوط مثلثاتی قوسهای $2a$ و $3a$ و غیره را بسط دهیم خطوط مثلثاتی na معلوم میشود

۵۷- تقسیم قوسها - محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{n}$ - برای محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{n}$ بنابر آنکه $\cos a$ یا $\sin a$ یا $\tan a$ معلوم باشد در روابط $\cos na$ یا $\sin na$ یا $\tan na$ قوس a را به $\frac{a}{n}$ تبدیل میکنیم در اینصورت روابط اول و دوم معادله دو مجهولی خواهد بود که هریک با رابطه $\cos^2\frac{a}{n}+\sin^2\frac{a}{n}=1$ تشکیل دستگاه دو معادله دو مجهولی را میدهد که از حل آنها $\sin\frac{a}{n}$ و $\cos\frac{a}{n}$ بحسب $\cos a$ یا $\sin a$ بدست میآید و رابطه سوم معادله ایست یک مجهولی برحسب $\tan\frac{a}{n}$ که از حل آن $\tan\frac{a}{n}$ بحسب $\tan a$ حساب میشود

تبصره - باید دانست که با تعدادات فعلی حل این مسئله همیشه ممکن نبوده و وقتی قابل حل است که n مساوی یکی از قوای دو باشد در اینصورت حل مسئله منجر بحل یک یا یک سلسله معادلات درجه دوم میشود

مسئله ۱ - مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ برحسب $\cos a$

حل جبری - چون در دستور $\cos 2a=\cos^2a-\sin^2a$ قوس a را به $\frac{a}{2}$ تبدیل کنیم معادله حاصل با رابطه $\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}=1$ تشکیل دستگاه دو مجهولی ذیل را میدهد :

$$\begin{cases}\cos a=\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}\\ 1=\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}\end{cases}$$

که از حل آن نتیجه میشود :

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

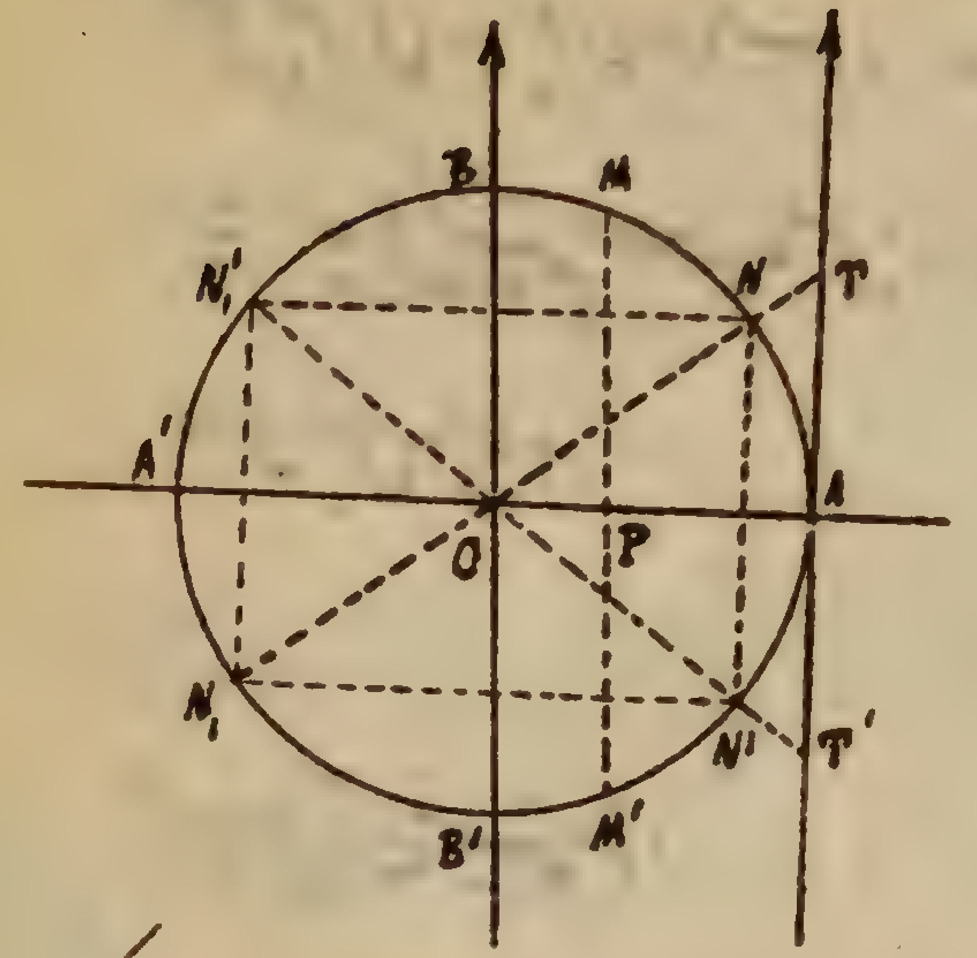
$$\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

و از آنجا

$$\tan\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

بطوریکه ملاحظه میشود بفرض معلوم بودن $\cos a$ برای $\cos\frac{a}{2}$ و $\sin\frac{a}{2}$ و $\tan\frac{a}{2}$ هریک دو جواب مساوی و مختلف العلامه بدست میآید و این موضوع را بوجه هندسی و مثلثاتی نیز میتوان تحقیق نمود

حل هندسی - بر قطر AA' طول $\overline{OP}$ مساوی $\cos a$ را نقل نموده از نقطه P وتر MM' را بر قطر AA' عمود میکنیم در اینصورت قوسهای a عبارتند از قوسهای بمبدء A و منتهای M یا M' و قوسهای $\frac{a}{2}$ هرگاه منتهای



قوس a را نقطه M فرض کنیم منتهای M وسط قوس هندسی AM و یا N_1 قرینه آن نسبت بمرکز O میباشد و هرگاه قوس a را بمنتهای M' فرض نمائیم انتهای قوسهای $\frac{a}{2}$ نقطه N' وسط قوس هندسی AM' و یا N'_1 قرینه آن نسبت بمرکز O خواهد بود

بنابرآنکه منتهای قوس $\frac{a}{2}$ را N یا N_1 و N' یا N'_1 فرض کنیم با رعایت آنکه شکل $NN'N_1N'_1$ مربع مستطیل است برای خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ جوابهای قرینه بدست میآید

حل مثلثاتی - اگر α یکی از اندازه های قوسی باشد که جیب تمامش مساوی $\cos a$ است در اینصورت کلیه اندازه های قوس a چنین است $a = 2K\pi \pm \alpha$ ولذا $\frac{a}{2} = K\pi \pm \frac{\alpha}{2}$ حال اگر K زوج باشد نتیجه میشود :

$$\sin\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = +\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \tan\frac{\alpha}{2}$$

و اگر K فرد باشد

$$\sin\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \mp \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(K\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \tan\frac{\alpha}{2}$$

از اینجا نیز معلوم میشود که برای خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ دو مقدار قرینه حاصل میشود

تبصره - هرگاه علاوه بر $\cos a$ قوس a نیز معلوم باشد منتهای قوس $\frac{a}{2}$ مشخص شده و لذا جواب مسئله منحصر بفرد میگردد

مثال - مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{\pi}{8}$ درصورتیکه میدانیم $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

چون انتهای قوس $\frac{\pi}{8}$ در ربع اول است لذا خطوط مثلثاتی آن مثبت میباشد پس :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2}-1$$

مسئله ۲ - مطلوبست محاسبه خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ برحسب $\sin a$

حل جبری - چون در دستور $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ قوس a را به $\frac{a}{2}$ تبدیل کنیم معادله حاصل با دستور $\cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} = 1$ تشکیل دستگاه دو مجهولی ذیل را میدهد :

$$\left|\begin{array}{l} 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a \\ \cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} = 1 \end{array}\right|$$

حال چون دو رابطه فوق را یکمرتبه باهم جمع و یکمرتبه از یکدیگر تفریق کنیم حاصل میشود :

$$\left|\begin{array}{l} \left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2 = 1 + \sin a \\ \left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)^2 = 1 - \sin a \end{array}\right| \quad \text{و یا} \quad \left|\begin{array}{l} \sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1+\sin a} \\ \sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1-\sin a} \end{array}\right|$$

از ترکیب معادلات دستگاه اخیر چهار دستگاه دو معادله دو مجهولی بدست میآید که چون آنها را حل کنیم برای $\sin\frac{a}{2}$ و $\cos\frac{a}{2}$ مقادیر ذیل حاصل میگردد :

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}\right)$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}\right)$$

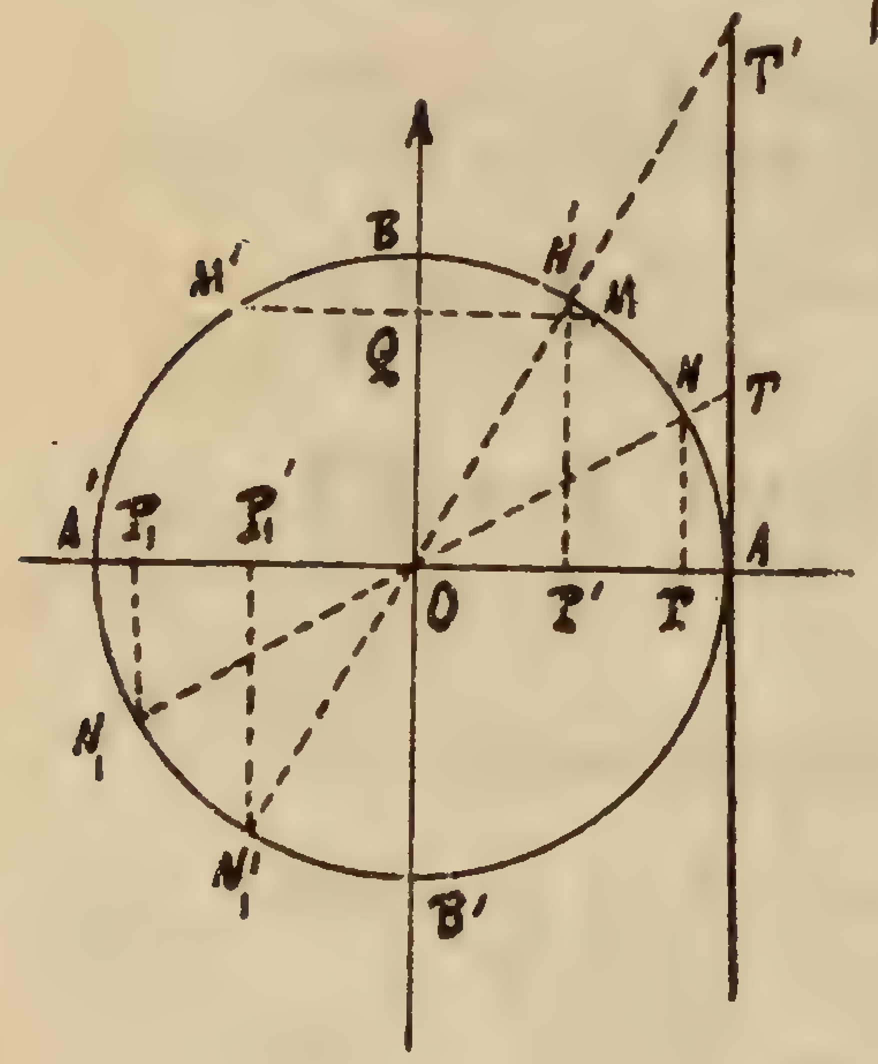
باید دانست که تمام ترکیبات علامات فوق جواب مسئله نبوده بلکه علامات باید نظیر بنظیر اختیار شوند بطوریکه مسئله دارای بیش از چهار جواب نخواهد بود

از تقسیم دو رابطه فوق بر یکدیگر با رعایت علامات نظیر برای $\tan\frac{a}{2}$ فقط دو مقدا

$$\frac{\sqrt{1+\sin a} + \sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a} - \sqrt{1-\sin a}} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{1+\sin a} - \sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a} + \sqrt{1-\sin a}}$$

که عکس یکدیگرند بدست میآید

حل هندسی - بر قطر BB' قطعه $\overline{OQ}$ را مساوی $\sin a$ جدا نموده و از نقطه Q خط MM' را بر BB' عمود میکنیم در اینصورت قوسهای a عبارت میگردند از قوسهای بمبدء A و بمنتهای M یا M' و قوسهای $\frac{a}{2}$ مانند مسئله قبل بمنتهای N و N_1 یا N' و N'_1 خواهند بود حال بنابرآنکه منتهای قوس $\frac{a}{2}$ نقطه N یا N_1 یا N' یا N'_1 باشد



چهار جواب برای $\sin\frac{a}{2}$ و $\cos\frac{a}{2}$ بدست میآید که دو بدو متساوی و مختلف العلامه میباشند ولی چون نقاط N و N_1 و همچنین N' و N'_1 نسبت بمرکز O قرینه میباشند لذا برای $\tan\frac{a}{2}$ فقط دو جواب $\overline{AT}$ و $\overline{AT'}$ نتیجه میشود که معکوس بودن

آنهارا بسهولت میتوان تحقیق نمود

حل مثلثاتی - فرض میکنیم α یکی از اندازه‌های قوس a باشد درینصورت

اندازه‌های قوس a عبارتند از $a = 2k\pi + \alpha$ و $a = (2k+1)\pi - \alpha$

پس اندازه‌های قوس $\frac{a}{2}$ عبارتند $\frac{a}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2}$ $\frac{a}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

حال اگر k زوج باشد نتیجه میشود:

$$\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} \qquad \sin\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cot\frac{\alpha}{2} \qquad \tan\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \tan\frac{\alpha}{2}$$

واگر k فرد باشد

$$\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \sin\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cot\frac{\alpha}{2} \qquad \tan\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \tan\frac{\alpha}{2}$$

چنانکه ملاحظه میشود برای جیب وجیب تمام قوسهای $\frac{a}{2}$ چهار مقدار که دو بدو متساوی و مختلف العلامه اند بدست میآید ولی برای $\tan\frac{a}{2}$ فقط دو مقدار معکوس حاصل میشود

تبصره - هرگاه علاوه بر $\tan a$ قوس a نیز معلوم باشد منتهای قوس $\frac{a}{2}$ مشخص بوده بنابراین برای خطوط مثلثاتی قوس $\frac{a}{2}$ فقط یک جواب بدست میآید

مسئله ۳ - مطلوبست محاسبه $\tan\frac{a}{2}$ برحسب $\tan a$

حل جبری - چون دررابطه $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ قوس a را به $\frac{a}{2}$ تبدیل کنیم حاصل میشود $\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$ که چون پس از رفع مخارج آنرا برحسب $\tan\frac{a}{2}$ مرتب کنیم معادله ذیل نتیجه میشود $\tan a \tan^2\frac{a}{2} + 2\tan\frac{a}{2} - \tan a = 0$ معادلهٔ اخیر معادله درجه دومی است برحسب $\tan\frac{a}{2}$ وچون حاصلضرب ریشه‌ها مساوی -1 است معلوم میشود که همواره دارای دو ریشه معکوس مختلف العلامه میباشد

حل هندسی - نتیجه فوق را بطریقی مشابه با مسائل قبل میتوان بوجه هندسی تحقیق نمود

حل مثلثاتی - اگر α یکی از اندازه‌های قوس a باشد صورت کلی قوسهای a $a = k\pi + \alpha$ وصورت کلی قوسهای $\frac{a}{2}$ $\frac{a}{2} = k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ میباشد

حال اگر k زوج باشد یعنی $k = 2k'$ حاصل میشود:

$$\tan\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(k'\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \tan\frac{\alpha}{2}$$

واگر k فرد باشد یعنی $k = 2k'+1$ نتیجه میشود :

$$\tan\left(k\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right) = \tan\left(k'\pi + \frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right) = -\cot\frac{a}{2}$$

چنانکه ملاحظه میشود مسئله دارای دو جواب $\tan\frac{a}{2}$ و $-\cot\frac{a}{2}$ که معکوس و مختلف العلامه اند میباشد

تبصره — از مسئلهٔ فوق طریقه محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{a}{2}$ معلوم میشود و بهمین وجه میتوان خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{a}{4}$ که مساوی نصف $\frac{a}{2}$ است تعیین نمود و بهمین طریق خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{a}{8}$ و $\frac{a}{16}$ و بالاخره خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{a}{2^n}$ حساب میشود

۵۸ـ **محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوس a بحسب $\tan\frac{a}{2}$** ـ چون طرف دوم روابط

$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}$ و $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

را بر $\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}$ تقسیم کنیم حاصل میشود :

$$\cos a = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}} \quad \text{و} \quad \sin a = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}}$$

از تقسیم صورت و مخرج کسرهای طرف ثانی بر $\cos^2\frac{a}{2}$ نتیجه میشود :

$$(34)\quad \begin{cases} \sin a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \\[2ex] \cos a = \dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \end{cases}$$

و از تقسیم این دو رابطه بیکدیگر حاصل میشود

$$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

با ملاحظه سه رابطه فوق قضیه ذیل را میتوان نتیجه گرفت

قضیه — خطوط مثلثاتی هر قوس بحسب ظل نصف قوس آن عباراتی منطقند

تمرینات

۵۶ـ بفرض $\cos a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ مطلوبست محاسبهٔ $\cos 2a$ و از آن قوس های a را تعیین کنید

۵۷ـ مطلوبست محاسبهٔ $\sin 2x$ درصورتیکه $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ و همچنین وقتیکه $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد

۵۸ـ اگر $\tan a = 2$ باشد مطلوبست محاسبه $\sin 3a$ و $\cos 3a$ و $\sin 4a$ و $\cos 4a$

۵۹ـ بفرض $\sin a = \frac{1}{3}$ و $\sin b = \frac{1}{2}$ و a و b کوچکتر از ۹۰ درجه

مطلوبست محاسبه $\sin 2(a+b)$

۶۰- بفرض $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{2}-1$ مطلوبست محاسبه $\sin a$ و $\cos a$ و $\operatorname{tg} a$

۶۱- اگر $\operatorname{tg}\alpha = (2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ باشد مطلوبست محاسبه $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ و قوس های α

۶۲- مطلوبست محاسبه $\operatorname{tg} 3a$ درصورتیکه $\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3}$ باشد

۶۳- مطلوبست محاسبه $\sin\frac{a}{2}$ و $\cos\frac{a}{2}$ و $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ درصورتیکه $\sin a = -\frac{24}{25}$ و انتهای قوس a در ربع چهارم باشد

۶۴- مطلوبست محاسبه $\sin\frac{a}{2}$ درصورتیکه $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$ باشد

۶۵- مطلوبست محاسبه $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ وقتیکه $\sin a = b$ باشد

۶۶- بفرض $\sin x = \frac{a-b}{a+b}$ مطلوبست تعیین $\operatorname{tg}(45^\circ - x)$ برحسب مقادیر a و b

۶۷- مطلوبست محاسبه $\cos 2a$ و $\cos a$ درصورتیکه $\cos 4a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ باشد

۶۸- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید :

$$\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \frac{2\sin a}{\cos a + \cos 3a}$$

$$\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a = \frac{\sin 3a \sin a}{\cos^2 2a \cos^2 a}$$

$$\operatorname{tg} 3a \cdot \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a \operatorname{tg}^2 a} = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\cos 2a + \cos 4a}$$

$$\operatorname{tg} 2a + \operatorname{séc} 2a = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$$

$$\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} \times \frac{\cos a}{1+\cos a} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

$$\sin a = \frac{2}{\operatorname{cotg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{a}{2}}$$

$$\left(\operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)^2 (1 - 2\operatorname{tg} a \operatorname{cotg} 2a) = 4$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = 2\operatorname{séc} a$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

$$\sin 3a = 4\sin a \sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

$$\cos 3a = 4\cos a \cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

$$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg} a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$$

$$\frac{2\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{2+\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2\,\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + a) - \operatorname{tg}(45^\circ - a) = 2\operatorname{tg} 2a$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) = 3\operatorname{tg} 3a$$

$$\left(1 + \operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{séc}\frac{a}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{séc}\frac{a}{2}\right) = \sin a \operatorname{séc}^2\frac{a}{2}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{a}{2} = 2(\operatorname{coséc} 2a + \operatorname{cotg} 2a)$$

$$\left(\operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4}{1 - 2\operatorname{tg} a \operatorname{cotg} 2a}$$

۶۹- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید وقتیکه انتهای قوس ها در ربع اول واقع باشند

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

۷۰- اگر A و B و C زوایای مثلث باشند صحت روابط ذیل را ثابت کنید :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0$$

$$2 \cos A \cos B \cos C = \frac{\sin 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

۷۱- اگر $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2b}{a-c}$ و

$$y = a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x$$ و

$$z = a \sin^2 x - 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x$$ باشد

مطلوبست محاسبهٔ y و z برحسب مقادیر a و b و c

۷۲- بفرض $\cos x = \dfrac{a}{b+c}$ و $\cos y = \dfrac{b}{c+a}$ و $\cos z = \dfrac{c}{a+b}$

صحت تساوی ذیل را ثابت کنید:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = 1$$

۷۳- اگر $(1+e\cos\theta)(1-e\cos u) = 1-e^2$ باشد

ثابت کنید که

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}$$

۷۴- مطلوبست تعیین معادله که ریشه هایش مربع ریشه های معادله ذیل باشد

$x^2 \sin 2\alpha - 2x(\sin\alpha + \cos\alpha) + 2 = 0$ و بوسیلهٔ حل این دو معادله

مسئله را امتحان کنید

۷۵- صحت اتحاد ذیل را تحقیق نموده $\operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cotg} 2a = \operatorname{cotg} a$

و از آن دستور ذیل را بدست آورید:

$$\operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} \frac{a}{2} + \dots + \operatorname{cosec} \frac{a}{2^n} = \operatorname{cotg} \frac{a}{2^{n+1}} - \operatorname{cotg} 2a$$

۷۶- بوسیلهٔ هریک از معادلات:

$$4 \sin^2 x - 2(1+\sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} = 0$$ و

$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - 1 = 0$ مطلوبست محاسبهٔ خطوط مثلثاتی قوسهای $2x$

فصل ششم

۱- تبدیل مجموع بحاصلضرب و بالعکس

۵۹- چون روابط

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

را یکدفعه جمع و یکدفعه از هم نقصان کنیم روابط ذیل نتیجه میشود:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$$

و همچنین از جمع و تفریق دو دستور:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

حاصل میشود :

$$\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$$

$$\sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\sin b$$

بنابراین از روابط فوق دستورات ذیل نتیجه میشود :

$$(۳۵)\begin{cases}\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]\\ \sin b\cos a = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]\\ \cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]\\ \sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]\end{cases}$$

از این روابط معلوم میشود که همواره ممکن است حاصلضرب دو جیب و دو جیب تمام یا حاصلضرب یک جیب در یک جیب تمام را بمجموع یا تفاضل دو جیب یا دو جیب تمام تبدیل نمود

۶۰ - حال اگر در روابط (۳۵) قوس a را مساوی $\frac{p+q}{2}$ و b را مساوی $\frac{p-q}{2}$ فرض کنیم دستورات ذیل نتیجه میشود :

$$(۳۶)\begin{cases}\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ \sin p-\sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\end{cases}$$

$$(۳۶)\begin{cases}\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ \cos p-\cos q = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{q-p}{2}\end{cases}$$

بوسیله این روابط میتوان حاصل جمع یا تفاضل دو جیب یا دو جیب تمام را بحاصلضرب تبدیل نمود

ب - تبدیل بعضی عبارات

۱- تبدیل مجموع یا تفاضل یک جیب و یک جیب تمام بحاصلضرب - برای تبدیل فوق کافی است که یکی از قوسها را بقوس متمم آن تبدیل نمود از اینقرار :

$$\sin p+\cos q = \sin p+\sin\left(\frac{\pi}{2}-q\right)$$

$$\sin p+\cos q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p+q}{2}\right)$$

و یا

۲- تبدیل $1\pm\cos a$ - چون بجای 1 مساوی آن $\cos 0$ را قرار دهیم مرتباً نتیجه میشود :

$$(۳۷)\begin{cases}1+\cos a = \cos 0+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}\\ 1-\cos a = \cos 0-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}\end{cases}$$

۳- تبدیل $1\pm\sin a$ - چون بجای 1 مساوی آن $\sin\frac{\pi}{2}$ را قرار دهیم مرتباً نتیجه میشود

$$1+\sin a = \sin\frac{\pi}{2}+\sin a = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

$$1-\sin a = \sin\frac{\pi}{2}-\sin a = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$$

و چون قوسهای $\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}$ و $\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$ متمم یکدیگرند از روابط فوق چنین میشود

$$1+\sin a = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

$$1-\sin a = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$$

۴- **تبدیل عبارت** $\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q}$ - برطبق روابط اول و دوم (۳۶) حاصل میشود :

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

و از آنجا

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \tan\frac{p-q}{2}\cot\frac{p+q}{2}$$

۵- **تبدیل** $\tan a \pm \tan b$ و $\cot a \pm \cot b$ - چون بجای ظل و ظل تمام نسبت قرارداده اعمال لازمه را مجری داریم حاصل میشود :

$$\tan p \pm \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p\cos q \pm \cos p\sin q}{\cos p\cos q}$$

و از آنجا

$$\tan p \pm \tan q = \frac{\sin(p\pm q)}{\cos p\cos q} \qquad (۳۸)$$

وبهمین طریق معلوم میشود که :

$$\cot p \pm \cot q = \frac{\sin(q\pm p)}{\sin p\sin q} \qquad (۳۹)$$

دستور (۳۹) را میتوان بوسیلهٔ تبدیل قوسهای p و q بقوسهای متمم آن از دستور (۳۸) نیز نتیجه گرفت

از دستورات فوق نتیجه میشود :

$$\frac{\tan p - \tan q}{\tan p + \tan q} = \frac{\sin(p-q)}{\sin(p+q)}$$

$$\frac{\cot p - \cot q}{\cot p + \cot q} = \frac{\sin(q-p)}{\sin(q+p)}$$

۶- **تبدیل عبارات** $1\pm\tan a$ و $\frac{1-\tan a}{1+\tan a}$ - چون $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

لذا $1\pm\tan a = \tan\frac{\pi}{4}\pm\tan a = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}\pm a)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos a} = \frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}\pm a)}{\cos a}$

و $\frac{1-\tan a}{1+\tan a} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-a)}{\sin(\frac{\pi}{4}+a)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$

ج- جداول لگاریتمی

۱- چون در مثلثات برای سهولت اغلب محاسبات بوسیلهٔ لگاریتم انجام میگیرد لذا لگاریتم خطوط مثلثاتی قوسهای محصور مابین صفر و ۹۰ درجه را در جداول مخصوصی تنظیم نموده اند تا در محاسبات با رجوع بجداول فوق بتوان مسائل لازمه را حل نمود اینک نکات اصلیه ذیل را راجع بتشکیل و طرز استعمال جداول فوق الذکر متذکر میشویم

عموماً لگاریتم خطوط مثلثاتی قوسهای بین صفر و ۹۰ درجه را در جداول مختلفه تا چهار یا پنج و یا هفت و یا نه رقم اعشار حساب کرده اند و فعلاً چون جدولی که بیشتر مورد استعمال است جدول معروف پنج رقمی J. Dupuis میباشد لذا بطرز تشکیل و استعمال جدول فوق میپردازیم

طرز تشکیل جداول فوق بدینطریق است که هر دو صفحه آن مخصوص لگاریتم خطوط مثلثاتی قوسهای

بین دو درجه متوالی باختلاف دقایق میباشد درجه فوق صفحه و دقایق در اولین ستون سمت راست مندرج است

حال با رعایت آنکه هرگاه دو قوس متمم یکدیگر باشند جیب یکی مساوی جیب تمام دیگری و ظل یکی مساوی ظل تمام دیگری میباشد ملاحظه میکنیم که هرگاه خطوط مثلثاتی قوسهای بین صفر و ۴۵ درجه معلوم باشد میتوان خطوط مثلثاتی قوسهای بین ۴۵ درجه و ۹۰ درجه را تعیین نمود چنانکه اگر در ستونی از فوق بتحت سینوسها قوسهای از ۲۱° ۴۰′ تا ۲۱° ۵۰′ نوشته شده باشد این مقادیر از تحت بفوق برتبا $\log \cos$ قوسهای ۶۸° ۱۰′ تا ۶۸° ۲۰′ که متمم قوسهای فوقند خواهند بود بدین مناسبت است که در جداول خطوط مثلثاتی قوسهای بین صفر و ۴۵ درجه را مرتب نموده و در ذیل صفحه متمم آنها را باختلاف یکدرجه که مربوط بدقایق مندرجه در دو صفحه است ذکر نموده و ستون دقایق مربوط بذیل صفحه را در اولین ستون سمت چپ از تحت بفوق نوشته اند

در جداول لگاریتمی علاوه بر ستونهائیکه در آن لگاریتم خطوط مثلثاتی مندرج است شامل بعضی ستونها نیز میباشد که بعلامت diff. یا D مشخص شده مقادیر مندرجه در این ستونها عبارتند از تفاضل دو لگاریتم متوالی چنانکه:

$\log \sin(23^\circ 14') = \bar{1},59604$ و $\log \sin(23^\circ 15') = \bar{1},59633$

(صفحه ۸۴ جدول J. Dupuis) تفاضل این دو لگاریتم که مساوی ۲۹ است در ستون D بین دو ردیف ۱۵′ و ۱۶′ ذکر شده و همچنین ستون D مقابل بعد از $\log \cos$ عبارت از تفاضل $\log \cos$ قوسهای متوالی است ولی برای $\log \operatorname{tg}$ و $\log \operatorname{cotg}$ فقط یک ستون D بین آنها موجود است زیرا چون $\operatorname{cotg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$ و $\operatorname{cotg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$ میباشد پس $\log \operatorname{cotg} A = -\log \operatorname{tg} A$ و $\log \operatorname{cotg} B = -\log \operatorname{tg} B$ بوده از تفریق این دو تساوی نتیجه میشود:

$$\log \operatorname{cotg} A - \log \operatorname{cotg} B = -[\log \operatorname{tg} A - \log \operatorname{tg} B]$$

یعنی تفاوت بین $\log \operatorname{tg}$ دو قوس از حیث قدر مطلق مساوی تفاضل $\log \operatorname{cotg}$ این دو قوس است

۶۲ - طرز استعمال جداول لگاریتمی - بوسیلهٔ جداول لگاریتمی میتوان دو مسئله ذیل را حل نمود

۱- بفرض معلوم بودن قوسی کوچکتر از ۹۰ درجه مطلوبست محاسبه لگاریتم خطوط مثلثاتی آن

۲ـ درصورتیکه لگاریتم یکی از خطوط مثلثاتی زاویه بین صفر و ۹۰ درجه معلوم باشد مطلوبست تعیین این زاویه

درحل این مسائل فقط بذکر نکات اصلیه ذیل میپردازیم :

دقتی که نمو قوسی نسبة کوچک باشد میتوان بطور نامحسوس نمو لگاریتم خطوط مثلثاتی را متناسب بانمو قوس فرض نمود بوسیلهٔ این مقدمه ممکن است خطوط مثلثاتی قوسی را شامل اجزائی باشد که در جدول موجود نیست حساب نمود

چنانکه اگر مقصود تعیین (۱۵″ ۴۵′ ۳۲°) log sin بوسیله جداول J. Dupuis باشد بوسیله جدول معلوم میشود (صفحه ۱۰۳) که ۱٫۷۳۳۱۸ = (۴۵′ ۳۲°) log sin وارستون D اختلاف جدولی را با log sin ما بعد که مساوی ۱۹ است تعیین نموده بوسیلهٔ یک تناسب log sin قوس مطلوب را معلوم میکنیم بدینقسم بازاءِ نمو ۶۰″ بر قوس ۱۹ واحد بر مرتبه پنجم (۴۵′ ۳۲°) log sin اضافه میشود پس اگر ۱۵″ بر قوس اضافه شود مقدار ۴٫۷۵ = $\frac{۱۵ \times ۱۹}{۶۰}$ بر مرتبه پنجم (۱۵′ ۳۲°) log sin اضافه خواهد شد صورت عمل چنین است

log sin (۳۲° ۱۵′) = ۱̅٫۷۳۳۱۸
بازاءِ ۱۵″ = ۴٫۷۵

log sin (۳۲° ۱۵′ ۱۵″) = ۱̅٫۷۳۳۲۲۷۵

عموماً محاسبهٔ این اختلاف را میتوان بوسیلهٔ ستونهای کوچکی که در حاشیه صفحه موجود است تعیین نمود

کلیه تفاوتهائیکه ممکن است دریک صفحه بین لگاریتم خطوط مثلثاتی واقع شود در حاشیه فوق ستونهای کوچکی نوشته شده و دریک طرف این ستونها از فوق به تحت اعداد ۱ و ۲ تا ۹ که نمایش ازدیاد ثانیه بر قوس است درج شده و در مقابل آنها مقادیریکه نمایش اختلاف مرتبه پنجم لگاریتم است ذکرشده چنانکه در مثال قبل در ستون ۱۹ برای تعیین ازدیاد log sin بازاءِ نمو ۱۵″ بر قوس بدینطریق عمل میکنیم دراین ستون معلوم میشود که بازاءِ نمو ۱″ مقدار ۰٫۳۲ و بازاءِ نمو ۵ مقدار ۱٫۵۸ را بر مرتبه پنجم اضافه میشود پس بازاءِ نمو ۱۰ مقدار ۳٫۲ = ۰٫۳۲ × ۱۰ و بازاءِ نمو ۱۵″ بر قوس مقدار ۴٫۷۸ = ۱٫۵۸ + ۳٫۲ بر مرتبه پنجم log sin اضافه میشود

چون جهت تغییرات جیب تمام وظل تمام زاویهٔ واقع بین صفر و ۹۰ درجه برخلاف جهت تغییرات این زاویه میباشد یعنی نظیر زاویه بزرگتر جیب تمام وظل تمام کوچکتر است

لذا برای تعیین log tg و log cotg زاویه که اجزاء آن خارج حدود جدول است باید log tg و log cotg زاویه بلافاصله بزرگتر را از جدول استخراج نموده بوسیلهٔ تناسبی نظیر آنچه قبلاً ذکر نموده‌ایم مسئله را حل نمود

مثلاً اگر مقصود تعیین log cos (۷۶° ۲۵′ ۵۲″) باشد صورت عمل چنین است

آ،۳۷۰۲۸ = log cos (۷۶° ۲۶′) (صفحه ۶۵) و اختلاف جدولی ۵۳ میباشد یعنی بازاء کم شدن ۶۰″ از قوس ۵۳ واحد بر مرتبه پنجم اضافه میشود لذا بازاء کم شدن ۸ ثانیه از قوس ۷۶° ۲۶′ مقدار ۷٫۰۷ = $\frac{۵۳ \times ۸}{۶۰}$ بر مرتبه پنجم اضافه میشود پس :

log cos (۷۶° ۲۶′) = آ،۳۷۰۲۸

بازاء ۸″ = ۷٫۵۷

---

log cos (۷۶° ۲۵′ ۵۲″) = آ،۳۷۰۳۵۵۷

مقدار اختلاف ۷٫۰۷ را میتوان بسهولت از ستون ۵۳ حاشیه تعیین نمود

مسئله عکس - بفرض معلوم بودن لگاریتم خطوط مثلثاتی قوسی کوچکتر از ۹۰ درجه مطلوبست محاسبهٔ آنقوس

این مسئله معکوس مسئله قبل است در ستون لگاریتم خط مثلثاتی لگاریتم مفروض را یافته و بدینوسیله زاویهٔ مطلوب معلوم میشود فقط باید نکات ذیل را در نظر گرفت

چون log sin 45° = log cos 45° = آ،۸۴۹۴۹ و

log tg 45° = log cotg 45° = ۰ پس اگر log sin یا log tg یا log cotg قوسی معلوم باشد باید آنها را مرتباً با اعداد آ،۸۴۹۴۹ و یا صفر مقایسه نمود اگر کوچکتر از این مقادیر باشند از فوق صفحه در ستون sin یا tg مقادیر مفروض را تعیین نموده قوس مطلوب بدست میآید والّا از تحت صفحه در ستونهای sin و یا tg این مقادیر را جستجو میکنیم

و در حالتیکه log sec و یا log cotg قوسی در دست باشد اگر از اعداد فوق مرتباً بزرگتر باشند در اینصورت از فوق صفحه در ستونهای cos و cotg والّا از تحت صفحه در ستونهای cos و cotg مقادیر مفروض را تعیین نموده قوس نظیر آنها را معلوم میکنیم

۶۳ - **تبصره** - اگر بین خطوط مثلثاتی قوسی لگاریتم ظلّش معلوم باشد در اینصورت قوس مطلوب با دقت بیشتری معلوم میشود تا آنکه لگاریتم سایر خطوط مثلثاتی آن معلوم باشد.

زیرا $\log \operatorname{tg} x = \log \sin x - \log \cos x$

و $\log \operatorname{tg} (x+\alpha) = \log \sin (x+\alpha) - \log \cos (x+\alpha)$

(α قوسی است مثبت و $x+\alpha$ بین صفر و ۹۰ درجه است) از تفریق این دو تساوی نتیجه میشود :

$$\log \operatorname{tg} (x+\alpha) - \log \operatorname{tg} x =$$

$$\left[\log \sin (x+\alpha) - \log \sin x \right] + \left[\log \cos x - \log \cos (x+\alpha) \right]$$

اگر تفاضل طرف اول تساوی اخیر را به Δ و کروشه های طرف ثانی را به d و d' بنمائیم معلوم میشود که $\Delta = d + d'$ یعنی اختلاف جدولی $\log \operatorname{tg}$ بیش از اختلافات جدولی $\log \sin$ و $\log \cos$ میباشد پس چون قوس جزئی تغییر کند بین لگاریتم خطوط مثلثاتی آنها $\log \operatorname{tg}$ بیش از لگاریتم سایر خطوط مثلثاتی تغییر مینماید لذا بوسیله $\log \operatorname{tg}$ قوس با دقت بیشتری میتوان قوس مطلوب را تعیین نمود

د - قابل محاسبه نمودن عبارات دستورات بوسیله لگاریتم

۶۲ - دستوریکه از روی آن مقدار مجهولی بحسب مقادیر معلومه بدست میآید وقتی قابل

محاسبه بوسیله لگاریتم نامیده میشود که بتوان لگاریتم مقدار مجهول را مستقیماً از روی لگاریتم مقادیر معلومه حساب نمود

از این قرار برای اینکه دستوری قابل محاسبه بوسیله لگاریتم باشد لازم و کافی است که بستگی مابین مقادیر معلومه بوسیله علامات ضرب و تقسیم باشد

چون در جداول مثلثاتی لگاریتم خطوط مثلثاتی مندرج است لذا برای اینکه محاسبات سهلتر شود قبل از محاسبه باید دستورات و عبارات را قابل محاسبه بوسیله لگاریتم نمود

من باب مثال فرض میکنیم زوایای A و B معلوم و مطلوب محاسبه قوس x از دستور $2 \sin x = \sin 45^\circ + \sin 20^\circ$ (۱) باشد

برای محاسبه x از دستور (۱) اولاً باید $\log \sin 45^\circ$ و $\log \sin 20^\circ$ را حساب نمود ثانیاً باید بازاء آنها را تعیین نمود تا $\sin 45^\circ$ و $\sin 20^\circ$ معلوم شود ثالثاً باید لگاریتم مجموع $\sin 45^\circ + \sin 20^\circ$ را حساب نموده بر آن لگاریتم ۲ را افزود تا $\log \sin x$ معلوم شود را بعاً بوسیله معلوم بودن $\log \sin x$ باید قوس x را بوسیله جدول تعیین نمود

اما اگر قبل از محاسبات فوق دستور (۱) را قابل محاسبه کنیم چنین نتیجه میشود

$\sin x = \sin 42{,}50 \cdot \cos 7{,}5$ (۲) محاسبه x از دستور اخیر ساده‌تر است زیرا چون $\log \sin 42{,}5$ و $\log \cos 17{,}5$ را تعیین نمود حاصل را جمع کنیم $\log \sin x$ و در نتیجه قوس x تعیین میشود

تبدیل دستور (۱) را به دستور (۲) قابل محاسبه نمودن دستور (۱) مینامند

اینک برای تمرین بعضی عبارات را بعبارات قابل محاسبه بوسیله لگاریتم تبدیل میکنیم

۱- تبدیل مجموع $A+B$ - بفرض معلوم بودن $\log A$ و $\log B$ مطلوبست تبدیل $A+B$

عبارت فوق را میتوان چنین نوشت $A+B = A\left(1+\frac{B}{A}\right)$ و چون A و B مقادیر مثبتند لذا $\frac{B}{A}$ مثبت و میتوان آنرا مساوی $\mathrm{tg}^2\varphi$ فرض نمود (زاویه φ را که واسطه تبدیل فوق میباشد زاویهٔ معین مینامند) دراینصورت عبارت فوق چنین میشود :

$$A+B = A(1+\mathrm{tg}^2\varphi) = \frac{A}{\cos^2\varphi}$$

عبارت اخیر قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم است زیرا :

$$\log(A+B) = \log A + 2\,\mathrm{colog}\cos\varphi$$

زاویهٔ معین φ را از رابطه ذیل میتوان حساب نمود : $\frac{B}{A} = \mathrm{tg}^2\varphi$

و بنابراین

$$\log \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}(\log B + \mathrm{colog}\, A)$$

۲- تبدیل $A-B$ - فرض میکنیم A و B دو عدد مثبت و A بزرگتر از B باشد (در حالتیکه $B>A$ است $B-A$ را تبدیل نموده پس از محاسبه بر حاصل علامت - را میافزائیم) عبارت مفروض را میتوان چنین نوشت :

$A-B = A\left(1-\frac{B}{A}\right)$ و چون $B<A$ است بنابراین میتوان $\frac{B}{A}$ را مساوی $\sin^2\varphi$ فرض نمود ولذا عبارت فوق چنین میشود :

$$A-B = A(1-\sin^2\varphi) = A\cos^2\varphi$$

عبارت اخیر قابل محاسبه لگاریتمی است زیرا :

$$\log(A-B) = \log A + 2\log\cos\varphi$$

زاویهٔ معین φ از رابطهٔ ذیل حساب میشود :

$$\log\sin\varphi = \frac{1}{2}(\log B + \mathrm{colog}\, A)$$

تبصره - ممکن است بیک وسیله دو عبارت فوق را قابل محاسبه نمود بدینطریق :

چون در عبارت $A \pm B = A\left(1 \pm \frac{B}{A}\right)$ مقدار $\frac{B}{A}$ را مساوی $\mathrm{tg}\,\varphi$ فرض کنیم زاویهٔ معین φ از دستور $\log \mathrm{tg}\,\varphi = \log B + \mathrm{colog}\, A$ تعیین و عبارت فوق چنین میشود :

$$A \pm B = A(1 \pm \mathrm{tg}\,\varphi) = \frac{A\sqrt{2}\,\sin(45^\circ \pm \varphi)}{\cos\varphi}$$

عبارت اخیر قابل محاسبهٔ لگاریتمی است

مورد استعمال این تبدیل کمتر از تبدیلات قبل است زیرا محاسبات لگاریتمی در آن زیادتر میباشد

۲- تبدیل عبارت $A \pm B \pm C \pm \dots$ - چون $A \pm B$ را بیکی از وسائل قبل تبدیل بحاصلضرب نمائیم و حاصل آنرا با $C\pm$ و حاصل عبارت اخیر را با $D\pm$ قابل محاسبه کنیم عبارت فوق بوسیلهٔ انتخاب یکعده قوسهای معین قابل محاسبه میشود

۳- تبدیل عبارت کسری $\frac{A\pm B\pm C\pm\dots}{A'\pm B'\pm C'\pm\dots}$ - چون صورت و مخرج کسر فوق را جداگانه تبدیل کنیم عبارت فوق قابل محاسبه میشود

مثال- مطلوبست محاسبهٔ $\frac{A-B}{A+B}$ درصورتیکه $\log A$ و $\log B$ معلوم باشند

چون صورت و مخرج را بر A تقسیم نموده $\frac{B}{A}$ را مساوی $\tan\varphi$ فرض کنیم عبارت فوق چنین میشود :

$$\frac{A-B}{A+B} = \tan(45^\circ - \varphi)$$

۴- تبدیل عبارات اصم - برای تبدیل عبارت $\sqrt[m]{C}$ باید مقدار زیر رادیکال را بحاصلضرب عوامل تبدیل نمود

مثال- مطلوبست تبدیل عبارت $\sqrt{A^2+B^2}$

چون A^2 را عامل مشترک قرار داده $\frac{B^2}{A^2}$ را مساوی $\tan^2\varphi$ فرض کنیم عبارت فوق بدینصورت درمیآید $\sqrt{A^2-B^2} = \frac{A}{\cos\varphi}$

برای تمرین در تبدیلات فوق بحل مسائل ذیل میپردازیم

مسئله ۱- اگر b و c دو قطعه خط و A زاویهٔ معلومی باشد عبارت ذیل را قابل محاسبه نمائید $\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$

حل- برحسب اینکه b و c معلوم و یا اینکه لگاریتمشان معلوم باشد دو حالت اتفاق میافتد:

اولاً b و c معلومند - چون $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$ و $\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2} = 1$ لذا عبارت فوق چنین میشود

$\sqrt{(b^2+c^2)(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}) - 2bc(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2})}$ ویا

$\sqrt{(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{A}{2}}$ چون $(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}$ را عامل مشترک قرار داده آنرا از زیر رادیکال خارج کنیم حاصل میشود:

$$(b+c)\sin\frac{A}{2}\sqrt{1+\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2\cot^2\frac{A}{2}}$$

حال اگر زاویهٔ معین φ را قسمی انتخاب کنیم که : $\tan\varphi = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ (1)

باشد عبارت فوق چنین میشود $\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\varphi} = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$

ثانیاً لگاریتمهای b و c معلومند، زاویه معین دیگر δ را قسمی انتخاب میکنیم که $\operatorname{tg}\delta = \frac{c}{b}$ باشد دراینصورت رابطه (۱) برحسب δ چنین میشود:

$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$ ولذا عبارت مفروض بدینصورت درمیآید:

$$\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A} = \frac{b\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\sin\frac{A}{2}}{\cos\delta\cos\varphi}.$$

مسئله ۲ حل مثلثاتی معادلات درجهٔ دوم — بفرض اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای ریشه های حقیقی باشد ولگاریتم قدر مطلق ضرائبش معلوم باشد مطلوبست محاسبهٔ ریشه های آن

چون در دستور $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ مقدار b^2 را از زیر رادیکال خارج کنیم ریشه های معادلهٔ مفروض بدینصورت درمیآید:

$$x = -\frac{b}{a}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}\right)$$

برای تبدیل این عبارت دو حالت اتفاق میافتد:

حالت اول $ac>0$ — دراینصورت معادلهٔ مفروض دارای ریشه های متحدالعلامه است وچون $\Delta>0$ میباشد لذا $b^2>4ac>0$ وبنابراین

$1>\frac{4ac}{b^2}>0$ بطوریکه میتوان زاویهٔ معین φ را قسمی انتخاب نمود که $\sin^2\varphi = \frac{4ac}{b^2}$ باشد دراینصورت ریشه های معادله چنین میشوند:

$$x' = \frac{-b}{2a}(1+\cos\varphi) = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$x'' = \frac{-b}{2a}(1-\cos\varphi) = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

حالت دوم $ac<0$ — دراینصورت ریشه های معادلهٔ مفروض مختلف العلامه اند وچون $\frac{4ac}{b^2}$ منفی است لذا میتوان $-\frac{4ac}{b^2}$ را مساوی $\operatorname{tg}^2\varphi$ فرض نمود ولذا ریشه های معادلهٔ مفروض چنین میشود:

$$x = \frac{-b}{2a}\left(1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right) = \frac{-b}{2a}\times\frac{\cos\varphi\pm1}{\cos\varphi}$$

وازآنجا $x' = -\frac{b}{a}\times\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$ و $x'' = \frac{b}{a}\times\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$

مسئله ۳ — عبارت $x = a\cos(\omega t+\alpha) + b\cos(\omega t+\beta)$ را که در آن t نمایش زمان و a و b و ω اعدادی مثبت و α و β دو عدد جبری میباشند بعبارت $c\cos(\omega t+\gamma)$ تبدیل کنید (c نمایش عددی است مثبت و γ عددی است جبری).

پس از بسط عبارت فوق حاصل میشود:

$$x = (a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos\omega t - (a\sin\alpha + b\sin\beta)\sin\omega t$$

چون عبارت $(a\cos\alpha + b\cos\beta)$ را عامل مشترک قرار داده کسر $\dfrac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{a\cos\alpha + b\cos\beta}$ را مساوی $\operatorname{tg}\gamma$ فرض کنیم عبارت فوق چنین میشود

$$x = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{\cos\gamma}(\cos\omega t\cos\gamma - \sin\omega t\sin\gamma)$$

و بفرض $c = \dfrac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{\cos\gamma}$ عبارت فوق بدینصورت درمیآید

$$x = c\cos(\omega t + \gamma)$$

برای تبدیل عبارات $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{a\cos\alpha + b\cos\beta}$ و $c = \dfrac{a\cos\alpha + b\cos\beta}{\cos\gamma}$ میتوان چنین نوشت :

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{1+\dfrac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}}{1+\dfrac{b\cos\beta}{a\cos\alpha}}$$

و بفرض $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}$ و $\operatorname{tg}\varphi' = \dfrac{b\cos\beta}{a\cos\alpha}$ رابطهٔ اخیر چنین میشود :

$$(1)\quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi'} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{\cos\varphi'\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)}{\cos\varphi\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi')}$$

تساوی c را میتوان مرتباً چنین نوشت :

$$c = \frac{a\cos\alpha}{\cos\gamma}\left(1+\frac{b\cos\beta}{a\cos\alpha}\right) = \frac{a\cos\alpha}{\cos\gamma}(1+\operatorname{tg}\varphi')$$

و از آنجا

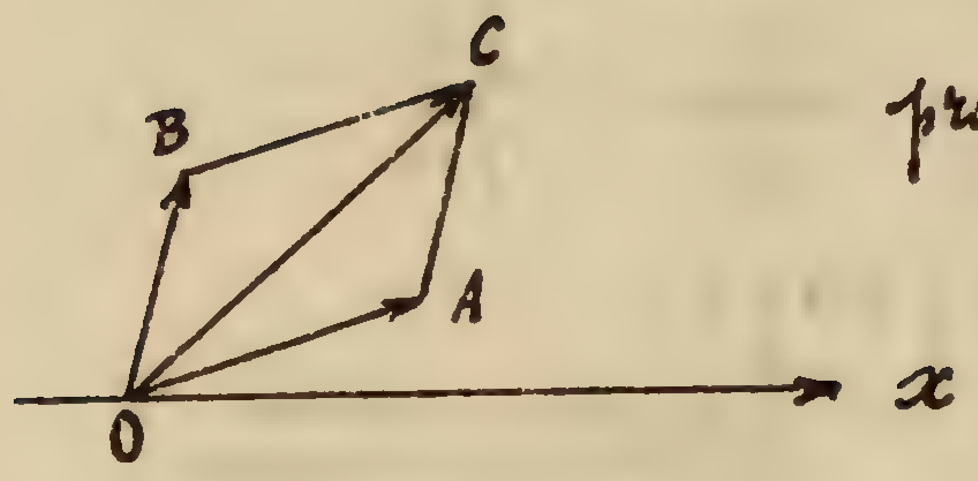
$$(2)\quad c = \frac{a\sqrt{2}\cos\alpha\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi')}{\cos\gamma\cos\varphi'}$$

از روابط (۱) و (۲) که قابل محاسبه بوسیله لگاریتم میباشند میتوان مقادیر c و γ را حساب نمود

میتوان بوجه هندسی تبدیل عبارت x را بعبارت $c\cos(\omega t+\gamma)$ تحقیق نمود

فرض میکنیم دو حامل $OA = a$ و $OB = b$ بترتیب با محور Ox زوایای $(\widehat{Ox, OA}) = \omega t + \alpha$ و $(\widehat{Ox, OB}) = \omega t + \beta$ را تشکیل دهند حال چون ملاحظه کنیم که $(OC) = (OA) + (OB)$ میباشد

از تصویر رابطهٔ هندسی فوق بر محور Ox حاصل میشود :



$$\operatorname{proj}_{Ox}(OC) = \operatorname{proj}_{Ox}(OA) + \operatorname{proj}_{Ox}(OB)$$

و یا

$$a\cos(\omega t+\alpha) + b\cos(\omega t+\beta) = OC\cos(\widehat{OC, Ox})$$

بطوریکه اگر طول OC را برابر با c و زاویه $(\widehat{OC, Ox})$ را برابر با $\omega t+\gamma$ فرض میکنیم تبدیل فوق همواره ممکن میباشد

تمرینات

۷۷- عبارات ذیل را بحاصلضرب عوامل تبدیل کنید

$1+2\cos a+\cos 2a$ $\qquad$ $1+2\sin a-\cos 2a$

$1+\cos a+\sin a$ $\qquad$ $1-\cos a+\sin a$

$\sin^2 3a-\sin^2 a$ $\qquad$ $\cos^2 5a-\sin^2 3a$

$1\pm 2\cos a$ $\quad$ $1\pm 2\sin a$ $\qquad$ $1\pm\sqrt{2}\cos a$ $\quad$ $1\pm\sqrt{2}\sin a$

$\sin a\cos a-\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\sin a\pm\sin 2a$

$\tan^2 2a-\tan^2 a$ $\qquad$ $\tan a\pm 2\sin^2 a$

$\sin 3a-\sin 2a+\sin a$ $\qquad$ $1-4\cos^2 a$

$\frac{\sin(a+b)}{\sin a\pm\sin b}$ $\qquad$ $\frac{\cos^2 a-\cos^2 b}{\sin(a-b)}$

$\frac{\sin a-\sin b}{\tan a-\tan b}$ $\qquad$ $\frac{\tan a}{\tan b}-\frac{\tan b}{\tan a}$

$\tan(a+b+c)-(\tan a+\tan b+\tan c)$

$\frac{\sin 3a-\sqrt{3}\sin a}{\sin 3a+\sqrt{3}\sin a}$ $\qquad$ $\frac{\sin a+\sin 4a+\sin 7a}{\cos a+\cos 4a+\cos 7a}$

$$\frac{\sin 3a+\cos 3a+\sin 5a+\cos 5a+\sin 7a+\cos 7a}{\cos 3a+\cos 5a+\cos 7a}$$

۷۸- عبارت $1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ را بحاصلضرب عوامل تبدیل کنید و حاصل را بصورت مربع مجموع دو جیب تمام درآورده و قوس x بین صفر و 2π را فتی تعیین کنید که عبارت فوق ماکزیمم یا می‌نیمم شود

۷۹- اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند مطلوبست تبدیل عبارات ذیل

بحاصلضرب عوامل :

$\sin A+\sin B-\sin C$ $\qquad$ $\cos A+\cos B-\cos C-1$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$ $\qquad$ $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C$

$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$ $\qquad$ $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}+1$

$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C$

۸۰- ثابت کنید که در هر مثلث این روابط برقرار است :

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin B\sin A}=2$$

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$$

$$\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}$$

۸۱- صحت اتحادهای ذیل را تحقیق کنید :

$$\sin 15^\circ\sin 75^\circ=\cos 15^\circ\cos 75^\circ=\frac{1}{4}$$

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$$

$$\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 60^\circ\tan 80^\circ=3$$

$$\frac{\sin 3a}{\sin a}-2\cos 2a=1$$

$$\frac{\sin 5a}{\sin a}-2(\cos 2a+\cos 4a)=1$$

$$\frac{\sin 7a}{\sin a}-2(\cos 2a+\cos 4a+\cos 6a)=1$$

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

۸۲- عبارات ذیل را بحاصلضرب عوامل تبدیل کنید :

$$S = \sin x + \sin(x+h) + \sin(x+2h) + \dots + \sin[x+(n-1)h]$$

$$S' = \cos x + \cos(x+h) + \cos(x+2h) + \dots + \cos[x+(n-1)h]$$

(بوسیله ضرب طرفین تساویهای فوق در $2\sin\frac{h}{2}$ وتبدیل هر جمله بحاصل جمع)

۸۳- مطلوبست تعیین قوسهای x ریشه های معادله ذیل وقتیکه بین $-\pi$ و π باشند

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$$

۸۴- معادلات ذیل را حل کنید :

$$2\sin x \sin 3x = 1$$

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\tan(a+x)\tan(a-x) = \frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

۸۵- بفرض $a+b=c$ ثابت کنید که ،

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c = 1$$

۸۶- اگر $a+b+c=\pi$ باشد صحت روابط ذیل را ثابت کنید :

$$\cot\frac{a}{2} + \cot\frac{b}{2} + \cot\frac{c}{2} = \cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}$$

$$\sin na + \sin nb + \sin nc = 4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{na}{2}\cos\frac{nb}{2}\cos\frac{nc}{2}$$

۸۷- بفرض $\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1+\sin a \sin b}$ ثابت کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \pm\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\right)$$

۸۸- اگر $\sin x + \sin y = \sin x \sin y$ باشد صحت رابطه ذیل را ثابت کنید

$$\left(\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$$

۸۹- اگر عبارات $\sin(b+c-a)$ و $\sin(c+a-b)$ و $\sin(a+b-c)$ جمل متوالیه تصاعدی حسابی باشند ثابت کنید که $\tan a$ و $\tan b$ و $\tan c$ نیز جزء جمل متوالیه تصاعدی حسابی خواهند بود

۹۰- مطلوبست تعیین قوسهای x برحسب درجهٔ دگراد و رادیان درصورتیکه

$$\sin x = -\frac{2}{3} \quad , \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = -\frac{4}{\sqrt{3}} \quad و \quad \cot x = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

۹۱- مطلوبست محاسبهٔ عبارات ذیل بوسیلهٔ لگاریتم :

$$\sqrt{29{,}354^2 - 11{,}725^2}$$

$$\sqrt{39{,}75^2 + 24{,}435^2 - 2\times 34{,}75 \times 24{,}435\cos(72^\circ,43')}$$

$$1+\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2(a+b)$$

$$\sin^2(a-b) + \sin^2(b-c) + \sin^2(c-a)$$

۹۲- مطلوبست محاسبه قوسهای x ریشه های معادلات

$$x = \sqrt{\sin^2\alpha \sin^2\beta - \cos^2\alpha \cos^2\beta}$$

$$\tan 3x = \sqrt{\frac{1-\tan^2\alpha}{1-\tan^2\beta}}$$

درصورتیکه $\alpha = 51^\circ\ 47'\ 17''$ و $\beta = 63^\circ\ 14'\ 25''$ باشد

۹۱- مطلوبست محاسبهٔ قوس x ازرابطهٔ

$$\sin x = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

وقتیکه $a = 25/675$ و $b = 12/5$ و $\alpha = 135/25$ گراد باشد

۹۲- مطلوبست محاسبهٔ قوسهای x ریشه‌های معادلات ذیل :

$$\tan 3x = a + \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sin x = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$$

$$\tan x = 2\tan\alpha + \sqrt{5}\cot\alpha$$

وقتیکه $a = \sqrt{3}$ و $b = \sqrt{2}$ و $\alpha = 35^\circ\ 16'\ 42''$

۹۵- مطلوبست محاسبه ریشه‌های معادلات ذیل بوسیلهٔ لگاریتم

$$x^2 + 140x + 7431 = 0$$

$$x^2\tan\alpha + 2x - \tan\alpha = 0 \qquad \alpha = 54^\circ\ 18'\ 25''$$

$$5\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

فصل هفتم – معادلات و نامعادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی تساوی دوعبارت راگویند که شامل خطوط مثلثاتی یک یاچند قوس بوده وتساوی طرفین بازاء بعضی ازمقادیراین قوسها محقق شود

این مقادیررا جوابهای معادلهٔ مثلثاتی نامند

۱- معادلهٔ یکمجهولی

۶۵- یک معادلهٔ مثلثاتی یک مجهولی دارای جوابهای بیشماراست ممکن است که این جوابهارا بدستجات مختلفه تقسیم نمود بقسمیکه اختلاف بین جوابهای هردسته مضرب صحیح از 2π باشد حال اگرقوسهای هندسی مختلفه که جواب معادلهٔ مثلثاتی مفروضند تعیین شود میتوان صوَرکلی جوابهای معادلهٔ مفروض راتعیین نمود

برای حل معادلات مثلثاتی یک مجهولی دوحالت ذیل رامیتوان تشخیص داد :

حالت اوّل – درصورتیکه معادلهٔ مفروض فقط شامل یکی ازخطوط مثلثاتی قوس مجهول باشد دراینصورت بایدهمان خطّ مثلثاتی رامجهول معاون قرارداده ومعادله رانسبت بآن مجهول حل نمود بعدازتعیین آن خط مثلثاتی قوسهائیکه خطوط مثلثاتی آنها باآن برابراست جواب معادله خواهندبود

مثال ۱- معادلهٔ ذیل راحل کنید $1 - 2\cos x = 0$

چون $\cos x$ رامجهول معاون قراردهیم حاصل میشود $\cos x = \frac{1}{2}$ ویا

$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ وازآنجا $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

مثال ۲ ـ مطلوبست حل و بحث معادله ذیل :

$$(1) \qquad 2m\sin^2 x - \sin x - m + 1 = 0$$

چون $\sin x$ را که همواره محصور بین ۱ و ۱- میباشد مجهول معاون قرار داده آنرا مساوی y فرض کنیم حل معادله فوق منجر بحل معادله شرطیه ذیل میگردد :

$$(2)\begin{cases} 2my^2 - y - m + 1 = 0 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$$

ازحل معادله درجه دوم فوق حاصل میشود :

$$y = \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{8m^2 - 8m + 1}}{4m}$$

بحث ـ اولاً شرط آنکه معادله (۲) دارای یک جواب باشد آنستکه $f(1)f(-1) < 0$

یا $m(m+2) < 0$ وازآنجا $-2 < m < 0$

ثانیاً برای آنکه معادله (۲) دارای دوجواب قابل قبول باشد آنستکه :

$\Delta \geq 0$ یا $8m^2 - 8m + 1 \geq 0$ وازآنجا $m \geq \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ یا $m \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$af(1) > 0$ یا $2m^2 > 0$ که همیشه محقق است

$af(-1) > 0$ یا $2m(m+2) > 0$ وازآنجا $m > 0$ یا $m < -2$

$-1 < \frac{S}{2} < 1$ یا $(m - \frac{1}{4})(m + \frac{1}{4}) > 0$ ازآنجا $m > \frac{1}{4}$ یا $m < -\frac{1}{4}$

برای تعیین جوابهای مشترک نامساویهای فوق جدول ذیل را تشکیل میدهیم

m	$-\infty$ … -2	-2 … $-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$ … 0	0 … $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ … $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ … $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ … $+\infty$
$\Delta \geq 0$	+	+	+	+	+	−	+
$af(1) > 0$	+	+	+	+	+	+	+
$af(-1) > 0$	+	−	−	+	+	+	+
$-1 < \frac{S}{2} < 1$	−	−	+	+	+	−	−
نتیجه	دوجواب	یک جواب	یک جواب	ممتنع	ممتنع	ممتنع	دوجواب

بنابراین شرط آنکه معادله دارای دوجواب بین ۱ و ۱- باشد آنستکه: $m < -2$

و یا $m > \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

مثال ۳ معادله $\sqrt{\cos x + m\cos^2 x} = 1 - 2\cos x$ را

بازاء مقادیر مختلفه m حل و بحث کنید

چون $\cos x$ را به y تبدیل نموده معادله را مربع کنیم دستگاه شرطیه ذیل نتیجه میشود

$$\begin{cases} y + my^2 = (1-2y)^2 \\ 1 - 2y > 0 \\ 1 < y < -1 \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} (m-4)y^2 + 5y - 1 = 0 \\ -1 < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

چون مانند مسئله قبل معادله اخیر را بحث نمائیم جدول ذیل نتیجه میشود

m	Δ	a	$f(-1)$	$f(\frac{1}{2})$	نتیجه
$-\infty$					
	−	−	−	−	بدون جواب
$-\frac{9}{4}$	۰				دو قوس ...... $y'=y''=\frac{2}{5}$
	+	−	−	−	چهار قوس ... $-1 \; y' \; y'' \; \frac{1}{2}$
-2					
	+	−	−	+	چهار قوس ....
4		۰			دو قوس .... $y=\frac{1}{5}$
	+	+	−	+	دو قوس .... $y' \; -1 \; y'' \; \frac{1}{2}$
10					سه قوس ... $y'=-1 \quad y''=\frac{1}{2}$
	+	+	+	+	چهار قوس .... $-1 \; y' \; y'' \; \frac{1}{2}$
$+\infty$					

مثال ۳ـ بازاء چه مقادیری از m ریشه معادله $m\,tg^2\frac{x}{2}+2\,tg\frac{x}{2}+m=0$

بین صفر و $\frac{3\pi}{2}$ است

شرط اخیر را میتوان چنین نوشت $\frac{3\pi}{4} > \frac{x}{2} > 0$ و از این شرط معلوم میشود که

$tg\frac{x}{2}$ باید خارج فاصله (۰ و ۱ـ) باشد لذا بازاء هر مقدار $tg\frac{x}{2}$ خارج این

فاصله مقداری برای x بدست میآید که در نامساوی فوق صدق نموده و در نتیجه جواب

مسئله میباشد حال اگر $tg\frac{x}{2}$ را به t نمایش دهیم دستگاه شرطیه ذیل حاصل

میشود .

$$(1)\begin{cases} 3t^2-2t+m=0 \\ t \text{ خارج } (0 \text{ و } -1) \end{cases}$$

معادله شرطیه فوق را میتوان بطریقه ذیل بحث نمود :

معادله فوق را بصورت $m=-3t^2-2t$ نوشته منحنی نمایش تغییرات

m را رسم میکنیم حال با رعایت اینکه t باید خارج صفر و ۱ـ باشد مقادیر t

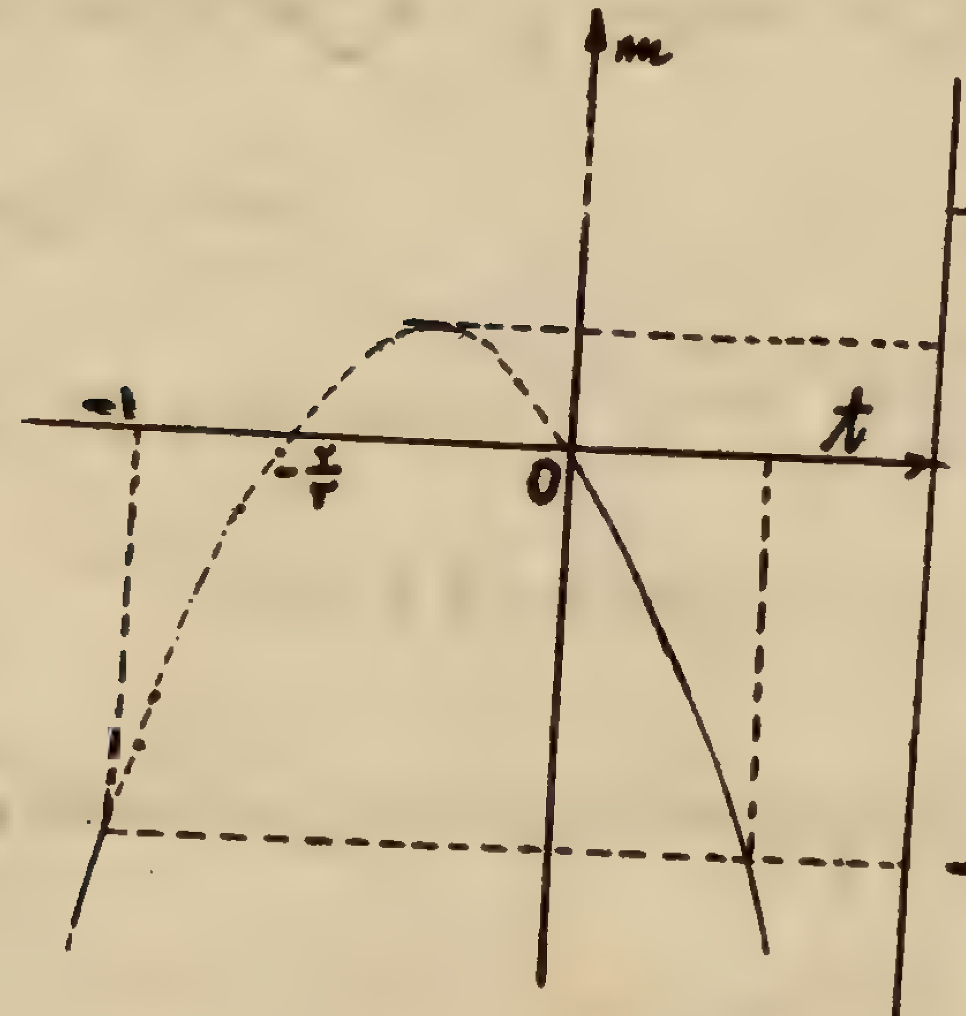
جواب های معادله عبارت خواهند بود از طولهای نقاطی از منحنی که در خارج ۰ و

۱ـ بوده و در شکل با خط پیوسته نمایش داده شده است

حال ملاحظه میکنیم که اگر $m>0$ باشد معادله دارای جواب نمیباشد و اگر

$0>m>-1$ باشد دارای یک جواب و اگر $m<-1$ باشد معادله دارای

دو جواب خواهد بود



m	ریشه‌های معادله (۱)	جوابهای مسئله
$+\infty$		
	بدون جواب	بدون جواب
$\frac{1}{3}$	$-1 \quad t' \quad t'' \quad 1$	
0	$t'=0$ و $t''=\frac{2}{3}$	بدون جواب یک جواب صفر
	$t''>0$ و $t'<-1$	یک جواب
-1	$t'=-1$ و $t''=\frac{1}{3}$	$x'=\frac{3\pi}{2}$ و x''
	$t'<-1$ و $t''>0$	دو جواب

حالت دوم ـ معادلهٔ مفروض شامل چندین خط مثلثاتی و قوس مجهول میباشد در اینصورت باید یکی از خطوط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داده سایر خطوط مثلثاتی را بآن خط تبدیل نموده و معادله را بصورت حالت اول در آورده حل نمود

حال برای انتخاب مجهول معاون میتوان بقاعده ذیل که باسم Bioche معروف است عمل نمود

۱ـ قاعده بیوش ـ هرگاه در معادلهٔ قوس x را به $-x$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\cos x$ را مجهول معاون قرار میدهیم

مانند معادله $\cos x + \sin^2 x = 1$ که پس از تبدیل $\sin^2 x$ به $1-\cos^2 x$

حاصل میشود $\cos^2 x - 2\cos x = 0$

۲ـ هرگاه در معادله قوس x را به $\pi - x$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\sin x$ را مجهول معاون قرار میدهیم

مانند معادله $\sin x - \cos 2x = 1$ که پس از تبدیل $\cos 2x$ به $1-2\sin^2 x$

حاصل میشود $2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

۳ـ هرگاه در معادله قوس x را به $\pi + x$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\tan x$

را مجهول معاون قرار میدهیم

مانند معادله $\sin x + 2\cos x = \sec x$ که پس از تقسیم طرفین بر $\cos x$

حاصل میشود :

$$\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

۴ـ بالاخره هرگاه در معادله قوس x را به $-x$ یا به $\pi - x$ یا به $\pi + x$ تبدیل کنیم و معادله تغییر کند $\tan\frac{x}{2}$ را مجهول معاون قرار میدهیم

مانند معادله $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ که پس از تبدیل $\sin x$ و $\cos x$ برحسب $\tan\frac{x}{2}$

حاصل میشود :

$$\tan^2\frac{x}{2} + 4\tan\frac{x}{2} - 3 = 0$$

غیر از قواعد فوق اغلب معادلات مثلثاتی را میتوان با استمداد از دستورات موجوده مابین خطوط مثلثاتی و تنها حل نمود اینک بعضی معادلات را که در مثلثات بیشتر مورد استعمال پیدا نموده و بمعادلات کلاسیک موسومند حل میکنیم.

مسئله ۱ـ مطلوبست حل و بحث معادله کلاسیک $a \sin x + b \cos x = c$ (۱)

طریقه اول ـ معادله (۱) برحسب مجهول $\sin x$ چنین میشود :

$$a \sin x \pm b \sqrt{1 - \sin^2 x} = c$$

چون رادیکال را تنها گذارده طرفین را مربع کنیم بدون داخل شدن ریشه خارجی

پس از اجرای اعمال لازمه معادله فوق بدینصورت درمیآید :

$$(a^2 + b^2) \sin^2 x - 2ac \sin x + c^2 - b^2 = 0 \qquad (2)$$

بحث ـ برای اینکه معادله (۱) دارای ریشه های قابل قبول باشد باید ریشه های

معادله (۲) حقیقی و بین ۱ و ۱ـ واقع باشند از معادله :

$(c - a \sin x)^2 = b^2 (1 - \sin^2 x)$ معلوم میشود که اگر ریشه موجود باشد قطعاً

بین ۱ و ۱ـ واقع میشد پس تنها شرط امکان مسئله مثبت بودن ممیز یعنی $c^2 \leq a^2 + b^2$

است

طریقه دوم ـ چون $\tan \frac{x}{2}$ را مجهول اختیار کنیم معادله (۱) پس از اجرای اعمال

لازمه چنین میشود $(b + c) \tan^2 \frac{x}{2} - 2a \tan \frac{x}{2} + c - b = 0$ (۳)

بحث ـ چون $\tan \frac{x}{2}$ محدود نبوده و میتواند جمیع مقادیر را دارا گردد بنابراین

شرط جواب آنست که معادله (۳) دارای ریشه های حقیقی باشد لذا باید :

$a^2 - (c - b)(c + b) \geq 0$ و از آنجا $c^2 \leq a^2 + b^2$

طریقه سوم ـ در حل بعضی معادلات اعمال طرق سابق بمحاسبات مشکل منجر میشود

بوسیله این طریقه میتوان محاسبات را ساده تر نمود

چون طرفین معادله (۱) را بر a تقسیم کنیم چنین میشود :

$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$ حال اگر $\frac{b}{a}$ را مساوی

$\tan \varphi$ فرض کنیم و طرفین معادله اخیر را در $\cos \varphi$ ضرب نمائیم معادله :

$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi$ ویا :

$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$ (۴) نتیجه میشود از این معادله $x + \varphi$ و از

آنجا قوس x معلوم میشود

بحث ـ برای اینکه معادله (۴) دارای جواب باشد باید $-1 \leq \frac{c}{a} \cos \varphi \leq 1$

ویا $\frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi \leq 1$ و چون $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi}$ و

$\tan \varphi = \frac{b}{a}$ میباشد پس شرط امکان مسئله چنین میشود $\frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq 1$ ویا

$c^2 \leq a^2 + b^2$

تبصره - باید دانست که بطریقه اخیر وقتی معادله (۱) را حل میکنند که ضرایب a و b و c مقادیر عددی بوده و مقصود محاسبه مقدار عددی قوس x باشد و در موقعیکه ضرایب فوق بپارامتری بستگی داشته باشد چون بطریقه اول و دوم حل و بحث مسئله منجر بحل و بحث معادله درجه دوم میگردد لذا بحث معادله ساده تر میشود

مسئله ۲ - مطلوبست حل و بحث معادله کلاسیک :

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

طریقه اول - این طریقه وقتی عملی است که ضرایب مقادیر عددی باشند میدانیم که

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{و} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

و $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ لذا معادله فوق پس از اختصار چنین میشود :

$$b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = 2d - a - c$$

معادله اخیر نظیر معادله کلی $a\sin x + b\cos x = c$ میباشد بطوریکه میدانیم شرط جواب آنستکه $b^2 + (c-a)^2 \geq (2d-a-c)^2$ و یا $b^2 \geq 4ac - 4ad - 4cd$

اصلی را در $\sin^2 x + \cos^2 x$ ضرب نموده طرفین معادله حاصل را بر $\cos^2 x$ تقسیم مینمائیم تا معادله ذیل حاصل شود :

$$a\,tg^2 x + b\,tg\,x + c = d(1 + tg^2 x)$$

معادله اخیر معادله درجه دومی است برحسب $tg\,x$ که آنرا بسهولت میتوان حل و بحث نمود

تبصره - بطور کلی طریقه دوم را که در فوق بیان نمودیم در کلیه معادلاتیکه در آنها $\sin x$ و $\cos x$ مجهول بوده و درجه کلیه جمل آن برحسب $\sin x$ و $\cos x$ زوج باشد میتوان عمل نمود باین طریق که ابتدا بوسیله ضرب کلیه جمل باستثنای جمله که دارای بزرگترین نماینده است دریکی از قوای $\sin^2 x + \cos^2 x$ تمام جمل را از حیث درجه یکی میکنیم و بعد طرفین را بر قوتی از $\cos x$ برابر با درجه مشترک جمل تقسیم میکنیم باین طریق معادله برحسب $tg\,x$ بدست میآید

مثال - معادله ذیل را حل کنید :

$$8\sin^3 x\cos x - 3\sin^2 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = 1$$

چون جمله دوم طرف اول را در $\sin^2 x + \cos^2 x$ و طرف ثانی را در

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$ ضرب کنیم پس از اختصار حاصل میشود :

$$4\sin^4 x - 8\sin^3 x\cos x + 3\sin^2 x\cos^2 x = 0$$

که پس از تقسیم طرفین بر $\cos^4 x$ معادله ذیل نتیجه میشود :

$$4\,\mathrm{tg}^4 x - 8\,\mathrm{tg}^3 x + 3\,\mathrm{tg}^2 x = 0$$

که بسهولت آنرا میتوان حل نمود

مسئله ۳ – مطلوبست حل و بحث معادلهٔ کلاسیک :

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c \qquad (1)$$

طریقهٔ اول – معادله (۱) را بترتیب میتوان چنین نوشت :

$$a\left[\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + \frac{1}{2}b\sin 2x = c$$

$$2a\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \frac{1}{2}b\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = c$$

$$2a\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + b\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1\right] = 2c$$

$$2b\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2a\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - b - 2c = 0 \qquad (2)$$

معادله (۲) معادله یک مجهولی درجهٔ دوّمی است برحسب $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ که میتوان آنرا حل و بحث نموده بوسیله آن ریشه های معادلهٔ (۱) را تعیین نمود

طریقهٔ دوّم – چون $\sin x + \cos x$ را مساوی y قرار داده طرفین آنرا مربع کنیم معلوم میشود که $y^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ و یا $\sin x\cos x = y^2 - 1$

و از آنجا معادله (۱) بدینصورت درمیآید :

$$by^2 + 2ay - (b + 2c) = 0$$

از حل این معادله y معلوم میشود برای تعیین x باید معادله $\sin x + \cos x = y$ را حل نمود و چنانکه میدانیم این معادله قابل تبدیل بصورت $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$ میباشد لذا از معادله اخیر معلوم میشود که $-1 \leq \frac{y}{\sqrt{2}} \leq 1$ و بنابراین حل و بحث معادلهٔ (۱) بحل و بحث معادله شرطیه ذیل منجر میشود :

$$\begin{cases} by^2 + 2ay - (b + 2c) = 0 \\ -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

مسئله ۴ – مطلوبست حل و بحث معادله کلاسیک $\sin px = \sin qx$ (۱) در صورتیکه p و q مقادیر معلوم باشند

از رابطه (۱) معلوم میشود که قوسهای qx و px دارای یک جیبند لذا یا مکملند و یا اختلافشان مضرب محیط دایره است پس میتوان نوشت :

$px = 360K + qx$ و $px = 360K + 180 - qx$

اگر $p \neq q$ باشد چنین میشود : $x = \frac{360K}{p-q}$

و $x = \frac{360K + 180}{p+q}$

اگر $p = q$ باشد دراینصورت معادلهٔ (۱) متماثله بوده و بازاء جمیع مقادیر x محقق است

تبصرهٔ ۱ — بهمین طریق میتوان معادلات $\cos px = \cos qx$ و $\tan px = \tan qx$ را حل نمود اگر $\tan px = \cot qx$ باشد میتوان معادله اخیر را باینصورت $\tan px = \tan(\frac{\pi}{2} - qx)$ نوشته بعد طریقه حل معادلهٔ (۱) را در بارهٔ آن مجری داشت

تبصرهٔ ۲ — اگر p و q اعداد صحیح باشند ممکن است معادلات فوق را بوسیلهٔ ذیل حل نمود مثلاً در معادله (۱) $\tan px$ و $\cos qx$ را تبدیل بعبارتی برحسب $\tan x$ نموده تا معادله یک مجهولی نسبت به $\tan x$ تشکیل شود

ب — نامعادلات مثلثاتی

۷۶ — برای حل نامعادلهٔ مثلثاتی قاعدهٔ حل نامعادلات جبری را باید بکار برد یعنی ابتدا

جمیع جمل را بیک طرف نامساوی نقل نموده و پس از انجام اعمال لازمه عبارت مفروضه را بحاصلضرب عوامل تبدیل و علامت هریک از آنها را در فواصل جوابها تحقیق میکنیم و از مقایسه علامات جوابهای نامعادله را بدست میآوریم

مثال ۱ — مطلوبست حل نامعادله $2\sin x - \sqrt{3} > 0$ وقتیکه $0 < x < 2\pi$ باشد

برای تحقیق علامت $2\sin x - \sqrt{3}$ آنرا مساوی صفر قرار میدهیم دراینصورت حاصل میشود $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ که جوابهای مابین صفر و 2π عبارت میگردد از $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{2\pi}{3}$ بنابراین جدول ذیل را میتوان تشکیل داد :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$2\sin x - \sqrt{3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
نتیجه		جواب نیست		جواب		جواب نیست	

ازینقرار جواب نامعادله فوق عبارت میگردد از $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$

مثال ۲ — مطلوبست حل نامعادله $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2$ بفرض $0 < x < 2\pi$

نامعادلهٔ فوق را مرتباً بصور ذیل مینویسیم : $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} - 2 > 0$

یا $\frac{-\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 0$ و یا $\frac{\cos x - 2\cos^2 x}{\cos 2x} > 0$

و از آنجا $\cos 2x \cos x (1 - 2\cos x) > 0$ حال جوابهای $\cos x = 0$

و $\cos 2x = 0$ و $1 - 2\cos x = 0$ را که محصور بین صفر و 2π

میباشند بدست آورده علامت هر یک را در فواصل جوابها تحقیق و بجدول ذیل را

مرتب مینمائیم :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$		+		0	−		0	+		
$\cos 2x$	+	0	−		0 +	0	−		0	+
$1-2\cos x$	−		0		+			0	−	
علامت حاصل	−	+	−	+	−	+	−	+	−	

بنابراین جوابهای نامعادله محصور مابین صفر و 2π عبارت خواهند بود از :

$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

و $\frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}$

ج ـ حلّ دستگاههای چند مجهولی

۸۶ ـ اگر معادلات دستگاههای چند مجهولی مثلثاتی فقط شامل خطوط مثلثاتی

قوسهای مجهول باشد مانند طریقه که در حل معادلات یکمجهولی ذکر نمودیم باید عمل نمود یعنی باید کلیه خطوط مثلثاتی هر قوس مجهول را بیکی از خطوط مثلثاتی آنقوس تبدیل نمود تا دستگاه مثلثاتی بیک دستگاه چند مجهولی معمولی تبدیل شود

گاه ممکن است که معادلات دستگاه شامل خطوط مثلثاتی قوسها و خود قوسها نیز باشد دراینحال نمیتوان قاعده کلی برای حل این قبیل دستگاهها بدست آورد ولیکن در دستگاهای دو مجهولی که یکی از معادلات آن فقط شامل مجموع یا تفاضل دو قوس مجهول بوده و معادلهٔ دیگر شامل خطوط مثلثاتی آن دو قوس باشد اغلب ممکن است با کمک از دستورات (۳۵ و ۳۶) درصورت معلوم بودن تفاضل مجموع دو قوس و درصورت معلوم بودن مجموع تفاضل دو قوس را تعیین نمود دراینصورت دستگاه فوق تبدیل بدستگاه دومجهولی ساده میشود ضمناً بشرح مثال بحل مسائل ذیل میپردازیم

مسئله ۱ ـ مطلوبست حلّ دستگاه دومجهولی :

$$(1)\quad \left| \begin{array}{l} a \tan x + b \tan y = c \\ a' \cot x + b' \cot y = c' \end{array} \right|$$

چون $\tan x$ را به X و $\tan y$ را به Y بنمائیم دستگاه (۱) چنین میشود

$$(2)\quad \left| \begin{array}{l} aX + bY = c \\ \frac{a'}{X} + \frac{b'}{Y} = c' \end{array} \right|$$

چون از معادله اول دستگاه اخیر x را تعیین نموده در معادلهٔ دوم گذاریم معادله یکمجهولی ذیل نتیجه میشود : $ac'x^2 + (bb' - aa' - cc')x + a'c = 0$ (۳)

بحث ـ تنها شرط امکان مسئله مثبت بودن مبین معادله (۳) است اگر این شرط موجود باشد دو مقدار برای x و از آنجا دو مقدار نیز برای y بدست میآید

مسئله ۲ ـ مطلوبست حل دستگاه

$$(1)\quad \left| \begin{array}{l} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{array} \right|$$

حل دستگاه (۱) بوسیلهٔ تبدیل مجهولات بظل نصف قوس شکل و منجر بحل معادلهٔ درجه چهارم میشود لذا بطریقه ساده ذیل عمل میکنند :

دستگاه فوق را میتوان چنین نوشت

$$(2)\quad \left| \begin{array}{l} 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = a \\ 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = b \end{array} \right|$$

از تقسیم این دو معادله $\tan\frac{x+y}{2} = \frac{b}{a}$ (۳) و از آنجا $\frac{x+y}{2}$ معلوم میشود و چون در یکی از معادلات دستگاه (۲) بجای $\frac{x+y}{2}$ مساویش را قرار دهیم $\frac{x-y}{2}$ نیز بدست میآید $\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\cos\frac{x+y}{2}}$ (۴)

بحث ـ ریشهٔ معادله (۳) همیشه قابل قبول است برای اینکه ریشهٔ معادله (۴)

قابل قبول باشد باید $\frac{a^2}{4\cos^2\frac{x+y}{2}} \leq 1$ و با ملاحظه مساوی (۳) شرط وجود ریشه های دستگاه چنین است $a^2 + b^2 \leq 4$

اگر این شرط موجود باشد زاویه α را قسمی میتوان یافت که $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ و لذا $\frac{x+y}{2} = \alpha + 180^\circ K$ (۵) پس $\cos\frac{x-y}{2} = (-1)^K \frac{a}{2\cos\alpha}$

حال اگر β زاویهٔ باشد که $\cos\beta = \frac{a}{2\cos\alpha}$ نتیجه میشود :

$\frac{x-y}{2} = 360^\circ K' + 180^\circ K \pm \beta$ (۶) از معادلات (۵) و (۶) مقادیر x و y معلوم میشود

مسئله ۳ ـ مطلوبست حل و بحث دستگاه :

$$\left| \begin{array}{l} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \cos y = a^2 \end{array} \right|$$

چون

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

و

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{x+y}{2} + 2\cos^2\frac{x-y}{2} - 1$$

$$= 2\cos^2\frac{x-y}{2} - 2\sin^2\frac{x+y}{2}$$

لذا دستگاه فوق چنین میشود :

$$\left| \begin{array}{l} \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos^2\frac{x-y}{2} - \sin^2\frac{x+y}{2} = a^2 \end{array} \right|$$

برای سهولت تحریر چون $\cos\frac{x-y}{2}$ را به u و $\sin\frac{x+y}{2}$ را به v بنامیم دستگاه فوق بدین صورت درمیآید

$$\begin{vmatrix} uv = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ u^2 - v^2 = a^2 \end{vmatrix}$$

یا

$$\begin{vmatrix} v = \frac{\sqrt{3}}{4u} \\ 16u^4 - 16a^2u^2 - 3 = 0 \end{vmatrix}$$

وچون $u^2 \leq 1$ و $\left(\frac{\sqrt{3}}{4u}\right)^2 \leq 1$

لذا حل وبحث دستگاه فوق بحل وبحث این دستگاه شرطیه منجر میشود:

$$\begin{vmatrix} 16u^4 - 16a^2u^2 - 3 = 0 \\ \frac{3}{16} \leq u^2 \leq 1 \end{vmatrix}$$

مسئلهٔ ۴ — مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع یا تفاضل جیب یا جیب تمام آن دو قوس معلوم است مطلوبست محاسبهٔ آن دو قوس

مسئله فوق بهشت دستگاه مشابه ذیل تقسیم میشود که ما فقط برای نمونه یکی از آنها را حل میکنیم

$$\begin{vmatrix} x \pm y = a \\ \cos x \pm \cos y = a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x \pm y = a \\ \sin x \pm \sin y = a \end{vmatrix}$$

مطلوبست حل دستگاه $\begin{vmatrix} x + y = a \\ \sin x + \sin y = a \end{vmatrix}$

معادلهٔ دوم این دستگاه را میتوان چنین نوشت $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$

ولذا $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$ وبنابراین $\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{a}{2}}$

حال اگر فرض کنیم $\cos\varphi = \frac{a}{2\sin\frac{a}{2}}$ باشد حاصل میشود $\cos\frac{x-y}{2} = \cos\varphi$

وازآنجا $\frac{x-y}{2} = 2k\pi \pm \varphi$ که باملاحظهٔ $\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$ جوابهای x و y بدست میآید

بحث — برای اینکه مسئله دارای جواب باشد کافی است که φ موجود بوده یعنی $\frac{a^2}{4\sin^2\frac{a}{2}} \leq 1$ باشد وچون نامساوی اخیر را برحسب a حل کنیم معلوم میشود که شرط جواب محصور بودن a بین $2\sin\frac{a}{2}$ و $-2\sin\frac{a}{2}$ میباشد

مسئلهٔ ۵ — مجموع یا تفاضل دو قوس و حاصلضرب جیب یا جیب تمام آنها معلوم است مطلوبست محاسبهٔ آن دو قوس

مسئلهٔ فوق بچهار دستگاه مشابه ذیل تقسیم میشود

$$\begin{vmatrix} x \pm y = a \\ \cos x \cos y = a \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} x \pm y = a \\ \sin x \sin y = a \end{vmatrix}$$

برای نمونه دستگاه $\begin{vmatrix} x+y=\alpha \\ \sin x \sin y = a \end{vmatrix}$ را حل میکنیم

رابطهٔ دوم این دستگاه را میتوان چنین نوشت

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2a$$

ویا $\cos(x-y) = 2a + \cos\alpha$ حال اگر φ را قسمی تعیین کنیم که

$2a + \cos\alpha = \cos\varphi$ باشد حاصل میشود $\cos(x-y) = \cos\varphi$

واز آنجا $x-y = 2k\pi \pm \varphi$ که باملاحظه $x+y=\alpha$ جوابهای x

و y بدست میآید

بحث — برای آنکه مسئله دارای جواب باشد لازمست $-1 \leqslant 2a + \cos\alpha \leqslant 1$

ویا $-(1+\cos\alpha) \leqslant 2a \leqslant 1-\cos\alpha$ واز آنجا $-\cos^2\frac{\alpha}{2} \leqslant a \leqslant \sin^2\frac{\alpha}{2}$

مسئله ۶ — مجموع یا تفاضل دو قوس و نسبت جیب یا جیب تمام آنها معلوم است

مطلوبست محاسبهٔ این دو قوس

مسئله فوق بچهار دستگاه مشابه ذیل تقسیم میشود

$$\begin{vmatrix} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{vmatrix} \quad و \quad \begin{vmatrix} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{vmatrix}$$

برای نمونه دستگاه $\begin{vmatrix} x+y=\alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{vmatrix}$ را حل میکنیم

معادلهٔ دوم دستگاه اخیر را میتوان چنین نوشت $\dfrac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \dfrac{a-1}{a+1}$

ویا $\dfrac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \dfrac{a-1}{a+1}$

ویا $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2} = \dfrac{a-1}{a+1}$

واز آنجا $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \dfrac{a-1}{a+1}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

حال اگر فرض کنیم $\dfrac{a-1}{a+1}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\varphi$ باشد حاصل میشود $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}\varphi$

بنابراین $\dfrac{x-y}{2} = k\pi + \varphi$ که باملاحظهٔ $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

جوابهای x و y بدست میآید

بحث — چون بازاء جمیع مقادیر a و α زاویه φ موجود است بنابراین مسئله

همیشه دارای جواب خواهد بود

مسئله ۷ — مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع یا تفاضل ظل آنها معلوم است مطلوبست

محاسبهٔ آندو قوس

مسئله فوق بچهار دستگاه ذیل تقسیم میشود $\begin{vmatrix} x \pm y = \alpha \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = a \end{vmatrix}$

برای نمونه دستگاه $\left| \begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a \end{array} \right|$ را حل میکنیم

طرف اول معادله دوم دستگاه اخیر را میتوان چنین نوشت :

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

و یا

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{2\sin\alpha}{\cos(x-y)+\cos\alpha}$$

و بنابراین $\frac{2\sin\alpha}{\cos(x-y)+\cos\alpha}=a$ و از آنجا

$\cos(x-y)=\frac{2\sin\alpha-a\cos\alpha}{a}$ حال اگر فرض کنیم

$\frac{2\sin\alpha-a\cos\alpha}{a}=\cos\varphi$ باشد حاصل میشود $\cos(x-y)=\cos\varphi$

و از آنجا $x-y=2k\pi\pm\varphi$ که با ملاحظهٔ $x+y=\alpha$ جوابهای

x و y معلوم میشود

بحث ـ برای اینکه مسئله دارای جواب باشد باید زاویهٔ φ موجود

لذا باید $\frac{(2\sin\alpha-a\cos\alpha)^2}{a^2}\leq 1$ و یا $a^2\operatorname{tg}^2\alpha+4a\operatorname{tg}\alpha-4\operatorname{tg}^2\alpha\geq 0$

نامساوی اخیر نامساوی درجهٔ دومی است برحسب a

از حل این نامساوی معلوم میشود که شرط جواب آنست که a خارج مقادیر

$2k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ واقع شود

مسئله ۸ ـ مجموع یا تفاضل دو قوس و حاصلضرب ظل آنها معلوم است مطلوبست محاسبه این دو قوس

مسئلهٔ فوق بدو دستگاه مشابه ذیل تقسیم میشود $\left| \begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=a \end{array} \right|$

برای نمونه دستگاه $\left| \begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=a \end{array} \right|$ را حل میکنیم

طرف اول معادله دوم دستگاه اخیر را میتوان چنین نوشت :

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}$$

و یا

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=\frac{\cos(x-y)-\cos\alpha}{\cos(x-y)+\cos\alpha}$$

بنابراین معادلهٔ دوم بدینصورت درمیآید $\frac{\cos(x-y)-\cos\alpha}{\cos(x+y)+\cos\alpha}=a$

و از آنجا $\cos(x-y)=\frac{1+a}{1-a}\cos\alpha$ و چون فرض میکنیم

$\frac{1+a}{1-a}\cos\alpha=\cos\varphi$ باشد حاصل میشود $\cos(x-y)=\cos\varphi$

و از آنجا $x-y=2k\pi\pm\varphi$ که با ملاحظهٔ $x+y=\alpha$

مقادیر x و y بدست میآید

بحث ـ برای اینکه زاویه φ موجود باشد باید $\frac{(1+a)^2}{(1-a)^2}\cos^2\varphi \leq 1$ باشد که نامساوی درجه دومی است برحسب a وآنرا بسهولت میتوان حل نمود

مسئله ۹ ـ مجموع یا تفاضل دو قوس ونسبت ظل آنها معلوم است مطلوبست محاسبه آن دو قوس

مسئله فوق بدو دستگاه ذیل تقسیم میشود

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

برای نمونه دستگاه $\begin{cases} x + y = a \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$ را حل میکنیم

معادلهٔ دوم دستگاه اخیر را میتوان چنین نوشت : $\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{a-1}{a+1}$

ویا $\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = \frac{a-1}{a+1}$ وازآنجا $\sin(x-y) = \frac{a-1}{a+1}\sin a$

وچون فرض کنیم $\sin\varphi = \frac{a-1}{a+1}\sin a$ باشد حاصل میشود $\sin(x-y) = \sin\varphi$

وازآنجا یا $x - y = 2k\pi + \varphi$ ویا $x - y = 2k\pi + \pi - \varphi$

که چون هریک را با معادله $x + y = a$ حل کنیم جوابهای x و y بدست میآید.

بحث ـ شرط اینکه دستگاه فوق دارای جواب باشد آنست که

$\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}\sin^2 a \leq 1$ نامساوی اخیر نامعادله درجهٔ دومی است بر

حسب a وآنرا بسهولت میتوان حل نمود

تبصره ـ مسائل ۷ و ۸ و ۹ را میتوان بکمک دستورات

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

حل نمود درینصورت دستگاه مفروض بدستگاه دو معادله دومجهولی برحسب $\tan x$ و $\tan y$ تبدیل میشود

تمرینات

۹۶ ـ معادلهٔ $m\sin^2 x - 2(m-2)\sin x + m + 2 = 0$ را حل نموده بازاء $m = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ قوس x را حساب کنید

۹۷ ـ معادله $\sin\alpha \tan^2 x - 2\cos\alpha \tan x + 1 = 0$ را بازاء مقادیر α بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ حل و بحث کنید

۹۸ ـ معادلات شرطیه ذیل را حل و بحث کنید

$$\sqrt{m\cos^2 x + 1} = 2\cos x - 1$$

$$\begin{cases} m\sin^2 x + 2\sin x - m = 0 \\ 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos^2 x - a\cos x - m = 0 \\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$(m-1)\cos^2 x - 2\cos x + 1 - m = 0 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(m-4)\tan^2 x - 2m\tan x + m = 0 \qquad \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

$$m\cos^2 x - 4(m-1)\cos x + m + 5 = 0 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3}$$

$$2\sin^2 x - m\sin x + 2 = 1 - \sin x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 x = 2m(1 - \cos x) + 4m^2 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \pi$$

۹۹- مطلوبست حل و بحث معادلات ذیل :

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = m$$

$$(m-1)\sin x + (m+1)\cos x = 2m$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + m\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + m - 1 = 0$$

(در حل معادله اخیر x را به $y + \frac{\pi}{6}$ تبدیل کنید)

$$\cos x + \sin x + m(1 + \sin 2x) = \cos 2x$$

$$a(\cos x - \sin x) + b(1 - \sin 2x) = \cos 2x$$

$$\sin x + \tan x = \sin x \cos x - \cos x$$

$$\cos 4x + \sin 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\tan(x+a)}{\tan(x-a)} = m$$

۱۰۰- اولاً عبارت $u = \cos 3x + \cos x$ و $v = u + \cos 2x$ را قابل محاسبه نمائید ثانیاً معادله $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ را حل کنید ثالثاً مطلوبست محاسبه $\tan x$ درصورتیکه قوس x ریشه معادله مفروض باشد

۱۰۱- معادله $\sin 3x = (n^2 - 5n + 3)\sin x$ مفروض است

اولاً بازاء چه مقادیری از n معادله مفروض دارای ریشه های حقیقی است

ثانیاً بازاء $n^2 - 5n + 1 = 0$ ریشه های معادله مفروض را تعیین کنید

۱۰۲- معادله $m = \sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x$ را بازاء مقادیر مختلفه m حل و بحث نموده بازاء $m = \frac{1}{2}$ قوس x را حساب کنید

۱۰۳- معادله $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = k$ را حل و بحث نموده بازاء ماکزیمم k زاویه x را حساب کنید

۱۰۳- معادله $\sin x + \cos x = a$ را حل و بحث نموده بازاء بزرگترین مقدار a زاویه x را حساب کنید

۱۰۴- اولاً معادله $m\cos x - (m+1)\sin x = m$ را حل و بحث کنید ثانیاً اگر x' و x'' دو ریشه این معادله واقع بین صفر و 2π باشد m را

قسمی تعیین کنید که $x' - x'' = \frac{\pi}{2}$

۱۰۴ - معادله $a\cos^2 x + b\sin x\cos x = c$ مفروض است رابطه بین ضرایب قسمی تعیین کنید که معادله مفروض اولاً دارای دو ریشه متمم ثانیاً دارای دو ریشه که اختلافشان $\frac{\pi}{4}$ است باشد

۱۰۵ - معادلات شرطیه ذیل را حل و بحث کنید

$$\left|\begin{array}{l} m\sin x + \cos x = m+1 \\ 0 < x < \pi \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} m\sin x + 4\cos^2\frac{x}{2} = m \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} m\sin x + \cos x + 3m - 1 = 0 \\ 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} m\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\sin x + 1) \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} (m+2)\cos^2 x + 2m\sin x\cos x + (m+1)\sin^2 x = m-3 \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{array}\right|$$

۱۰۶ - اولاً بازای $m=1$ معادله

$$3(\sin x + \cos x) = 4m\sin x\cos x$$

را حل کنید ثانیاً معادله مفروض را بازای $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ حل و بحث کنید

۱۰۷ - مطلوبست حل و بحث معادلات ذیل :

$$\cos 2x = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$$

(x را مساوی $\frac{\pi}{4} + y$ فرض میکنیم)

$$\tan(\frac{\pi}{4} - x) + \tan(\frac{\pi}{4} + x) = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$$

$$\tan x + \tan 2x = \tan 3x$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{8}) = 2\sin(\frac{3\pi}{8} - x)$$

(سه برابر قوس دوم مکمل قوس اول است)

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{a - 1 + \tan x}{a + 1 + \tan x}$$

(نتیجه معادله درجه سومی است برحسب $\tan\frac{x}{2}$ که یکی از ریشه‌هایش واحد است)

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$$

$$\sin 2x = m\sin^2(\frac{\pi}{4} - x)$$

(ممکن است قوس $\frac{\pi}{4} - x$ را مساوی y فرض کنیم)

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = m$$

$$\tan^2 x = m\tan(x + a)\tan(x - a)$$

$$2(\sin x - \cos x)^2 - 3(\sin x - \cos x) + 1 = 0$$

$$\cos 2x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = m\cos 2x$$

(در معادلهٔ زیر $\tan x$ را مجهول معاون قرار دهید)

$$\left|\begin{array}{l} \sin^3 x - 8\cos^3 x = m(\sin x - 2\cos x) \\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{array}\right|$$

نامعادلات ذیل را حل کنید:

$2\cos x + \sqrt{3} > 0$	بازاء	$0 < x < 2\pi$
$\tan x + \sqrt{3} < 0$	«	$0 < x < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x < 0$	«	« « «
$2\cos^2 x - \cos x > 0$	«	« « «
$\tan^2 x - (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} > 0$	«	$0 < x < 3\pi$
$\frac{\sqrt{2}\cos x + 1}{4\cos^2 x - 1} < 0$	«	$0 < x < 2\pi$
$\frac{\tan x}{1+\tan x} > 2$	«	$0 < x < \pi$
$\frac{\tan^2 x - 2}{\tan^2 x + 1} < \frac{1}{2}$	«	« « «
$\frac{\cos 2x}{1 - \sin x} > 0$	«	« « «

۱۰۸- اگر α قوسی بین صفر و π باشد مطلوبست بحث در ریشه‌های معادله

$$4x^2\cos^2\alpha - 4x\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 1 = 0$$

۱۰۹- اولاً مطلوبست حل و بحث معادله

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 - 4x + 4\cos\alpha - 1 = 0$$

بازاء مقادیر α بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ ثانیاً اگر x' و x'' ریشه‌های این معادله باشد بازاء چه مقداری از α این رابطه برقرار است $x'^2 + x''^2 = m$ در معادلهٔ حاصل بازاء مقادیر مختلفه m بحث کنید

۱۱۰- $x^2\cos^2\alpha - 2x\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = 0$ که در آن α بین صفر و π است مفروض میباشد اولاً مطلوبست حل و بحث معادلهٔ فوق ثانیاً بازاء $x = 2$ طرف اول معادله مفروض سه جمله درجه دومی برحسب $\cos\alpha$ میشود علامت این سه جمله را تعیین نمائید

۱۱۱- دستگاههای ذیل را حل کنید:

$$\left|\begin{array}{l} \sin 2x = \cos y \\ \tan x \tan 2y = 1 \end{array}\right|$$ درصورتیکه $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $0 < y < \frac{\pi}{2}$

$$\left|\begin{array}{l} \sin x = 2\sin y \\ 2\cos(x+y) = 2\cos(x-y) \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} \cos^2 x = \sin^2 y \\ \tan 2x = \tan x \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4} \end{array}\right|$$

۱۱۲- مطلوبست حل دستگاه

$$\left|\begin{array}{l} x + y + z = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \sin^2 y + \sin^2 z = \frac{3}{2} \end{array}\right|$$

درصورتیکه x و y و z جمل متوالیه تصاعد حسابی باشند

۱۱۳- مطلوبست حل و بحث دستگاههای ذیل:

$$\begin{cases} x+y=a \\ \sin x+\sin y=m(\sin x-\sin y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x+\tan y=1 \\ \cos x\cos y=m \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 2x\cos 2y=a \\ \tan x\tan y=2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ \sin x\sin y=m\cos^2 x \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan x=a\tan y \\ \tan 2x=b\tan 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=a \\ \sin^3 x+\sin^3 y=8m^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan^2 y=\sin a\tan 2x \\ \sin y=\sin a\cos x \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin y}{b}=\frac{\sin(x+y)}{c}$$

$$\frac{\tan x}{a}=\frac{\tan y}{b}=\frac{\tan(x+y)}{c}$$

۱۱۴- دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ \sin x+2\sin y=m\sin a \end{cases}$ مفروض است اولاً معادله برحسب مجهول $\tan\frac{x}{2}$ تشکیل دهید ثانیاً بفرض $0<a<\pi$ و $m>0$ مطلوبست بحث دستگاه فوق

۱۱۵- ثابت کنید که دستگاه

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{1-xy}=p \\ \dfrac{(1-x^2)(1-y^2)+4xy}{(1+x^2)(1+y^2)}=q \end{cases}$$

را میتوان بوسیله تبدیل x به $\tan\frac{A}{2}$ و همچنین y به $\tan\frac{B}{2}$ حل نمود و پس از اثبات بازاء $p=1$ و $q=\frac{1}{2}$ مقادیر x و y را حساب کنید

۱۱۶- در حل دستگاه $\begin{cases} \cos x=m\cos 2y \\ \cos y=m\cos 2x \end{cases}$ معلوم میشود که یا $\cos x=\cos y$ و یا $\cos x\neq\cos y$ است در هریک از این حالات دستگاه مفروض را حل و بحث کنید

۱۱۷- اولاً ثابت کنید که دستگاه

$$\begin{cases} \cos a+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0 \\ \sin a+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0 \end{cases}$$

متعادل با دستگاه ذیل است

$$\begin{cases} 1+\cos x+\cos y=0 \\ \sin x+\sin y=0 \end{cases}$$

ثانیاً پس از تعیین x و y ثابت کنید که انتهای قوسهای متحد المبداء a و $a+x$ و $a+y$ رؤس مثلث منظم محاطی در دایرهٔ مثلثاتی است

۱۱۸- مطلوبست حل و بحث دستگاههای ذیل

$$\begin{cases} \sin 2x+\sin 2y=2a \\ \cos 2x-\cos 2y=2b \end{cases}$$

شکل حول قطر دوران کند مطلوبست تعیین زاویه $\widehat{COB}=x$ بقسمی که مجموع سطوح حاصل از دوران شعاع OC و قوس BC مساوی $3m^2$ شود (بحث)

۱۲۲- در مسئله قبل مماس نقطه C مماسهای نقاط A و B را در نقاط A' و B' قطع میکند اولاً زاویهٔ x را قسمی تعیین کنید که حجم شکل حاصل از دوران ذوزنقه AA'B'B حول قطر AB مساوی m برابر کرهٔ بقطر AB شود ثانیاً پس از حل و بحث مسئله بازاء $m=\frac{13}{4}$ زاویه x را حساب کنید

۱۲۳- بر طرفین قطعه خط AB=a دو عمود اخراج شده است بر این دو عمود نقاط A' و B' را طوری تعیین کنید که عمود AA' نصف عمود BB' بوده و ظل فصل زاویه BAB' بر ABA' مساوی مقدار K شود پس از حل و بحث مسئله بازاء ماکزیمم K طول AA' را حساب کنید

۱۲۴- از نقطهٔ غیر مشخص M واقع بر محیط نیم دایره بقطر AB=2R مماس MT رسم شده است فرض میکنیم نقطه T محل تقاطع آن با امتداد قطر باشد اولاً زاویهٔ $\widehat{MAB}=x$ را قسمی تعیین کنید که $\overline{AM}=m.\overline{AT}$ شود پس از حل و بحث مسئله بازاء m=1 زاویه x را حساب کنید ثانیاً بازاء m=1 حجم شکل حاصل از دوران مثلث AMT حول قطر را تعیین کنید

۱۲۵- از نقطهٔ M واقع بر محیط نیم دایره بقطر AB=2R دو عمود MP و MQ را بترتیب بر قطر و بر مماس BQ فرود آورده ایم اگر مستطیل MPBQ مرتباً حول قطر و مماس دوران کند اولاً زاویه $\widehat{BOM}=x$ را قسمی تعیین کنید که نسبت بین

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=a \\ \cos x+\sin y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} \log(3x-\frac{\pi}{4})=\cot(y+\frac{\pi}{6}) \\ \sin x=\cos 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ \log x+\log y-\log x \log y=m \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=\pi \\ \frac{\log x}{a}=\frac{\log y}{b}=\frac{\log z}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=\pi \\ \frac{\sin x}{a}=\frac{\sin y}{b}=\frac{\tan z}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x+\sin y=a \\ \sin y+\sin z=b \\ \cos z-\cos x=c \end{cases}$$

۱۱۹- نیم دایره بقطر AB=2R مفروض است از نقطه A وتر غیر مشخص AC و از نقطه C وتر CT را بموازات قطر رسم میکنیم مطلوبست تعیین زاویه $\widehat{BAC}=x$ بقسمی که AC = m.CT شود پس از حل و بحث مسئله بازاء m=2 زاویه x را تا یک ثانیه تقریب حساب کنید

۱۲۰- بر یک ضلع زاویه قائمه O دو نقطهٔ A و B بفواصل OA=a و OB=b واقع میباشند بر ضلع دیگر این زاویه نقطه غیر مشخص M بفاصله OM=x قرار دارد اولاً x را طوری تعیین کنید که ظل زاویه AMB مساوی m شود ثانیاً بازاء چه مقدار x زاویه AMB ماکزیمم میشود

۱۲۱- بر محیط نیم دایرهٔ بقطر AB=2R نقطه غیر مشخص C واقع شده است چون

دو حجم حاصل مساوی مقدار m شود ثانیاً بازاء چه مقادیری از m مسئله دارای جواب است ثالثاً بازاء $m=\sqrt{2}-1$ زاویه x را حساب کنید

۱۲۶- قطاع AOB بشعاع $OA=OB=R$ و زاویهٔ مرکزی $\widehat{AOB}=45^\circ$ مفروض است مستطیل غیر مشخص MCDE را که رأس M آن بر قوس قطاع و دو رأس C و D آن بر شعاع OA و رأس دیگرش بر شعاع OB قرار دارد رسم میکنیم اولاً زاویه $\widehat{AOM}=x$ را طوری تعیین کنید که مستطیل تبدیل بمربع شود ثانیاً زاویه x را قسمی تعیین کنید که سطح مستطیل مساوی mR^2 شود (بحث بازاء مقادیر m)

۱۲۷- در قطاع OAB بشعاع R و زاویهٔ مرکزی α مستطیلی بسطح ماکزیمم محاط کنید بقسمی که قاعده اش موازی وتر قطاع باشد و بازاء $\alpha=120$ ابعاد مستطیل ماکزیمم را برحسب R حساب کنید

۱۲۸- ربع دایره AOB بشعاع واحد مفروض است از نقطه M واقع بر قوس AMB دو عمود MP و MQ را بترتیب بر دو شعاع OA و OB فرود میآوریم بفرض زاویه $MOA=x$ اولاً نقطه M را طوری تعیین کنید که نسبت محیط مستطیل OPMQ بسطحش مقدار m شود ثانیاً پس از بحث مسئله بازاء مقادیر مختلفهٔ m مطلوبست محاسبهٔ زاویهٔ x وقتیکه $m=2\sqrt{6}$ باشد

۱۲۹- در دایرهٔ (O, R) از نقطهٔ C وسط قوس غیر مشخص ACB وتر CE بموازات شعاع OA مرور نموده است اگر زاویه $\widehat{OAB}=x$ باشد اولاً زاویه x را طوری تعیین کنید که وتر AB وتر CE را بدو قسمت متساوی تقسیم کند

ثانیاً محاسبهٔ زاویه x منجر بمحاسبه $tg\,x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ میشود عبارت اخیر را قابل محاسبهٔ لگاریتمی نمائید

۱۳۰- از نقطهٔ غیر مشخص M واقع بر محیط نیم دایره بقطر $AB=2R$ عمود MH را بر قطر فرود آورده وتر MA را رسم میکنیم چون شکل را حول قطر دوران دهیم مطلوبست محاسبهٔ زاویه $\widehat{MAB}=x$ بقسمی که سطح کل مخروط حاصل از دوران مثلث MAH بسطح مثلث MAH مساوی $2\pi m$ شود بازاء مقادیر مختلفهٔ m مسئله را بحث نموده بازاء $m=\sqrt{3}$ زاویهٔ x را حساب کنید

۱۳۱- ربع دایرهٔ BOA بشعاع $OA=OB=R$ مفروض است بر نقطهٔ غیر مشخص M واقع بر قوس AB مماس DMC رسم شده است نقطهٔ D محل تقاطع این مماس با امتداد OB و نقطهٔ C محل تقاطعش با مماس نقطهٔ A است

اولاً- مطلوبست محاسبهٔ زاویه $MOA=x$ بقسمی که $l=AC+CD$ باشد

ثانیاً- بازاء مقادیر مختلفهٔ l بحث کنید

۱۳۲- دو خط Δ و Δ' بر طرفین قطعه خط $AA'=4a$ عمودند از نقطهٔ B وسط AA' و نقطهٔ C وسط AB دو خط متوازی MM' و NN' مرور نموده و با دو خط Δ و Δ' تشکیل متوازی الاضلاع NMM'N' را داده است مطلوبست تعیین زاویه $ABM=x$ بقسمی که محیط این متوازی الاضلاع بطول معین $2l$ شود و بازاء مقادیر مختلفهٔ l بحث کنید

۱۳۳- قطاع AOB بشعاع R و زاویه مرکزی α بین صفر و π مفروض است از نقطهٔ غیر مشخص M واقع بر قوس قطاع دو عمود MP و MQ را بر دو شعاع OA و OB فرود میآوریم اولاً زاویه $MOA = x$ را طوری تعیین کنید که مجموع دو عمود MP و MQ مساوی طول معین a شود ثانیاً پس از حل و بحث مسئله بازاء $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ و $a = \frac{3R}{2}$ زاویه x را حساب کنید

۱۳۴- نیم دایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است بر امتداد قطر نقطهٔ C بفاصله $AC = d$ و بر محیط نیم دایره نقطه غیر مشخص M واقع است بفرض زاویهٔ $MAB = x$ اولاً زاویهٔ x را طوری تعیین کنید که MC واسطهٔ هندسی بین قطعات MA و MB شود ثانیاً مسئله را بحث نموده بازاء ماکزیمم d زاویه x را حساب کنید

۱۳۵- از نقطهٔ A خارج دایره (O, R) بفاصله $OA = 2R$ مماس و قاطعی بر دایره رسم نموده ایم و نقطه E وسط وتر قاطع است اولاً زاویه OAM و $\operatorname{tg}\frac{OAM}{2}$ را حساب کنید ثانیاً زاویه $OAB = x$ را طوری تعیین کنید که سطح مستطیلی بابعاد AE و OE معادل m برابر مربع بضلع BE شود ثالثاً بفرض $x = 15°$ مقدار m را حساب کنید

۱۳۶- زاویهٔ قائمه xOy مفروض است طرفین قطعه خط $AB = l$ بر ضلعین این زاویه متکی است بازاء تغییر وضع نقاط A و B اولاً مکان هندسی نقطه M وسط قطعه خط AB را تعیین کنید ثانیاً اگر مثلث OAB حول Oy دوران کند مطلوبست تعیین شکل و وضع مقطع MC که بر وسط OB عمود است ثالثاً زاویهٔ $OAB = x$ را

قسمی تعیین کنید که سطح کل مخروط حاصل از دوران مثلث OAB حول محور Oy معادل m برابر سطح دایره بشعاع l شود پس از حل و بحث مسئله بازاء $m = \frac{3}{4}$ زاویهٔ x را حساب کنید

۱۳۷- قطاع AOB بزاویه مرکزی α و شعاع R مفروض است بر نقطهٔ غیر مشخص P واقع بر قوس قطاع مماس CD رسم شده است نقاط C و D بترتیب محل تقاطع این مماس با دو شعاع OA و OB میباشد بفرض زاویهٔ $\widehat{AOP} = x$ و $\widehat{BOP} = y$ اولاً مطلوبست تعیین نقطه P بقسمی که سطح مثلث COD مساوی $\frac{ma^2}{2}$ شود ثانیاً بازاء مقادیر مثبته m بحث کنید

۱۳۸- مطلوبست محاسبهٔ اجزاء مثلثی غیر مشخص که از آن زاویهٔ A و ضلع a و شعاع دایرهٔ محاطیهٔ داخلی (r) معلوم است (در حل این مسئله زوایای B و C را مجهول اختیار کنید)

۱۳۹- اگر r' و r'' و r''' اشعهٔ دوایر محاطیهٔ خارجی مثلث ABC باشند اولاً ثابت کنید که $r' = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ و $r'' = p\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ و $r''' = p\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ ثانیاً اگر این سه شعاع بترتیب جمل متوالیه تصاعدی حسابی باشند بفرض معلوم بودن زاویهٔ A سایر زوایا را حساب کنید

۱۴۰- از مبداء A بر محیط دایرهٔ مثلثاتی در یک جهت قوسهای $AM = x$ و $MN = y$ را جدا نموده وتر MN را وصل میکنیم اولاً طول تصاویر وتر MN را بر محورهای جیوب برحسب خطوط مثلثاتی x و y معلوم نموده حاصل را قابل محاسبه لگاریتمی نمائید

ثانیاً بفرض معلوم بودن تصاویر HH' قوسهای a و b را حساب نموده بازاء
مقادیر مختلفه تصاویر بحث کنید

فصل هشتم - حل مثلث

۶۹- بطوریکه در هندسه دیده ایم هرگاه در مثلثی از اضلاع و زوایا و سایر اجزاء
معلومات کافی در دست باشد میتوان مثلث را بوسیله ترسیم مشخص نموده و اجزاء
مجهوله آنرا بدست آورد این مقصود در مثلثات بوسیله محاسبه صورت میگیرد
بعبارة اخری هرگاه در مثلثی معلومات کافی در دست باشد میتوان اجزاء مجهوله
را از روی آنها حساب نمود که آنرا حل مثلث گویند

حال برای انجام مقصود فوق مابین اجزاء مثلث روابطی بدست میآوریم که بوسیله
آنها و با رعایت اجزاء معلومه دستگاه معادلاتی تشکیل شود که از حل آن اجزاء مجهوله
بدست آید

۷۰- **قضیه** - در هر مثلث مابین اضلاع a و b و c و زوایای
A و B و C فقط سه رابطه متمایز میتواند موجود باشد

اولاً سه رابطه متمایز موجود است زیرا بطوریکه در هندسه دیده ایم مثلث با وجود

معلوم بودن سه جزء از اجزاء اصلیه آن (اضلاع و زوایا) مشروط بر اینکه
لااقل یکی از آنها ضلع باشد مشخص شده و لذا اجزاء مجهوله بدست میآید بنابراین
قطعاً بین سه ضلع و سه زاویه هر مثلث باید سه رابطه متمایز موجود باشد که با معلوم بودن
سه جزء از اجزاء اصلیه مثلث دستگاه سه معادله سه مجهولی تشکیل گردد تا از حل آن اجزاء
مجهوله بدست آید

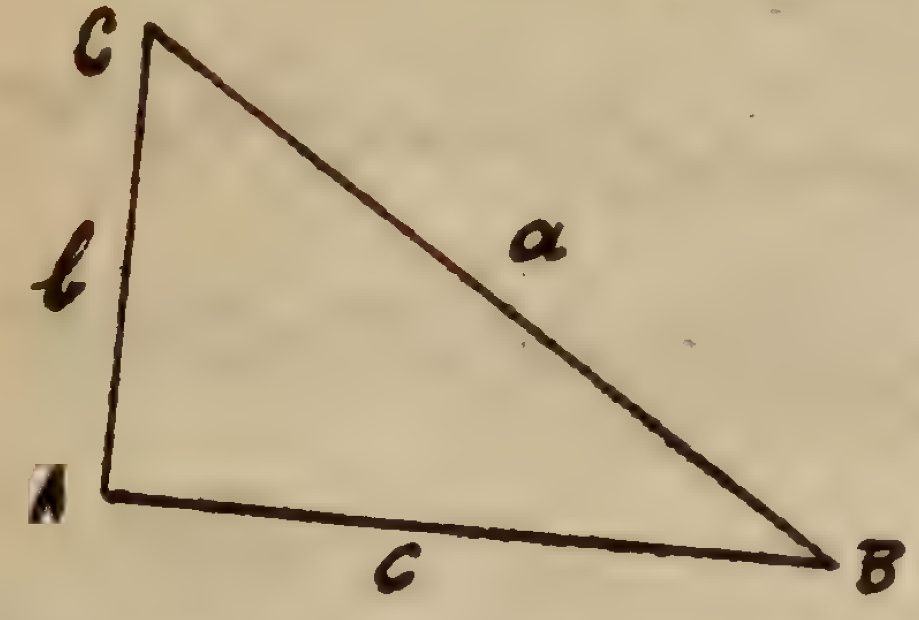
ثانیاً مابین اجزاء اصلیه مثلث بیش از ۳ رابطه متمایز نمیتواند موجود باشد زیرا بفرض
وجود مثلاً چهار رابطه متمایز در صورتیکه دو جزء مثلث مثلاً یکضلع و یک زاویه در دست
باشد چهار رابطه فوق تشکیل دستگاه چهار معادله چهار مجهولی را داده و از حل آن اجزاء
مجهوله بدست میآید بعبارة اخری مثلث با وجود معلوم بودن یک ضلع و یک زاویه
مشخص میگردد و حال آنکه عدم امکان این موضوع بوجه هندسی محقق است

تبصره - باید دانست که هریک از روابط موجوده مابین اجزاء اصلیه نمیتواند
شامل دو یا سه زاویه و یک ضلع باشد زیرا در اینصورت با معلوم بودن دو یا سه زاویه
یکضلع مثلث معلوم و لذا مثلث مشخص میگردد

مثلثات قائم الزاویه

۱- روابط ما بین اجزاء آن

۷۱- در مثلث قائم الزاویه ABC راس زاویهٔ قائمه را A قرار داده



وطول اضلاع را بحروف a و b و c مقابل برؤس متناظره A و B و C مینمائیم

قضیه – اولاً بفرض $A = \frac{\pi}{2}$ نتیجه میشود : $B + C = \frac{\pi}{2}$ (۱)

(مجموع زوایای هر مثلث دو قائمه است) و $a^2 = b^2 + c^2$ (۲)

(قضیه فیثاغورث)

ثانیاً ضلع مجاور بر زاویه قائمه مساویست با حاصلضرب وتر در جیب تمام زاویهٔ حاده مجاور آن و یا در جیب زاویهٔ حادهٔ مقابل آن یعنی $b = a \cos C$ (۳)

و یا $b = a \sin B$ (۴) و $c = a \cos B$ (۵) و یا

$c = a \sin C$ (۶)

ثالثاً هر ضلع مجاور بر زاویهٔ قائمه مساوی است با حاصلضرب ضلع دیگر در ظل زاویهٔ مقابل و یا در ظل تمام زاویهٔ حادهٔ مجاور آن یعنی $b = c \operatorname{tg} B$ (۷) و یا

$b = c \operatorname{cotg} C$ (۸) و $c = b \operatorname{tg} C$ (۹) و یا

$c = b \operatorname{cotg} B$ (۱۰)

اثبات – چون رؤس B یا C را مرکز قرار داده بشعاع واحد دائره رسم کنیم و خطوط مثلثاتی زوایای B و C را مشخص نمائیم از تشابه مثلثات روابط اخیر بدست میآید

از قضیه فوق معلوم میشود که بین اجزاء مثلث ده رابطه موجود است ولی بطوریکه در نمرهٔ (۷۰) تحقیق نموده ایم هر سه رابطهٔ متمایزی را میتوان روابط اصلیه قرار داده روابط دیگر را از آن استخراج نمود مثلاً از دستگاه متمایز

$$\left| \begin{array}{l} B + C = \frac{\pi}{2} \\ b = a \sin B \\ c = a \cos B \end{array} \right|$$

چون دو رابطه اخیر را مجذور نموده با یکدیگر جمع کنیم رابطه (۲) بدست میآید و همچنین از تقسیم روابط اخیر دستگاه رابطهٔ (۷) نتیجه میشود

۲- حل مثلثات قائم الزاویه

حالاتیرا که معلومات از اجزاء اصلیه مثلث باشد حالات کلاسیک و حالاتیرا

که معلومات از اجزاء اصلیه و اجزاء فرعیه (از قبیل ارتفاع میانه منصف الزاویه و غیره) و یا روابطی ما بین آنها باشد بحالت غیر کلاسیک موسوم میباشند اینک مثلث قائم الزاویه را در هریک از دو صورت فوق حل میکنیم

حل مثلث قائم الزاویه در حالات کلاسیک

حالت اول - معلومات $\hat{B}$ و a مطلوبست محاسبه $\hat{C}$ و b و c

از حل دستگاه
$$\left|\begin{array}{l} B+C=\frac{\pi}{2} \\ b=a\sin B \\ c=a\cos B \end{array}\right|$$
اجزاء مجهوله بدست میآید

بحث - چون زاویهٔ $\hat{C}$ باید مثبت و کوچکتر از ۹۰ درجه باشد لذا از رابطهٔ $C=\frac{\pi}{2}-B$ معلوم میشود که $\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}-B>0$ و از آنجا $\frac{\pi}{2}>B>0$ بعلاوه از روابط $b=a\sin B$ و $c=a\cos B$ با رعایت مثبت بودن طرف ثانی آنها طولهای b و c مثبت و بنابراین میتوانند اضلاع مثلث باشند از اینقرار با فرض $0<B<\frac{\pi}{2}$ مسئله همواره دارای یک جواب خواهد بود

حالت دوم - معلومات $\hat{B}$ و b مطلوبست محاسبهٔ $\hat{C}$ و a و c

از حل دستگاه
$$\left|\begin{array}{l} B+C=\frac{\pi}{2} \\ c=b\cot B \\ b=a\sin B \end{array}\right|$$
اجزاء مجهوله معلوم میشود $C=\frac{\pi}{2}-B$

و $a=\frac{b}{\sin B}$

بحث - بطریق مشابه با حالت اول معلوم میشود که بفرض $0<B<\frac{\pi}{2}$ مسئله همواره دارای یک جواب است

حالت سوم - معلومات a و b مجهولات $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و c

طریقهٔ ۱ - از رابطه $b=a\sin B$ حاصل میشود $\sin B=\frac{b}{a}$ که از روی آن زاویه B بدست میآید و از روابط $B+C=\frac{\pi}{2}$ و $c=a\cos B$ بترتیب زاویه $\hat{C}$ و ضلع c معلوم میشود

بحث - چون $0<B<\frac{\pi}{2}$ لذا $0<\sin B<1$ و یا $0<\frac{b}{a}<1$ و از آنجا $0<b<a$ که با این فرض زاویهٔ C نیز ما بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ واقع و ضلع c نیز مثبت بوده و بنابراین مسئله همواره دارای یکجواب است

طریقهٔ ۲ - از رابطه $b=a\cos C$ معلوم میشود که $\cos C=\frac{b}{a}$ و چون $\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos C}{1+\cos C}$ پس $\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}$ و یا $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

از تساوی اخیر زاویه C و از رابطه $B+C=\frac{\pi}{2}$ زاویهٔ B بدست میآید و از رابطه فیثاغورث نتیجه میشود $c=\sqrt{(a-b)(a+b)}$

بحث - شرط امکان مسئله است که $(a-b)(a+b)>0$ و از آنجا $a>b>0$

تبصره - مورد استعمال طریقه (۱) وقتی است که لگاریتم a و b در دست باشد ولی طریقهٔ (۲) وقتی مستعمل است که مقادیر a و b معلوم باشند بعلاوه باید دانست که محاسبه بطریقهٔ ثانی (۳) دقیقتر خواهد بود زیرا چنانکه میدانیم محاسبهٔ زاویا بوسیلهٔ ظل زاویه دقیقتر از محاسبهٔ آنها بوسیله جیب میباشد

حالت چهارم - معلومات b و c مجهولات $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و a

از رابطه $b=c\,tg\,B$ نتیجه میشود $tg\,B=\frac{b}{c}$ پس از محاسبه B از رابطهٔ $C=90-B$ زاویه C و از رابطه $b=a\sin B$ وتر a بدست میآید

بحث - چون زاویه B بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ است لذا شرط امکان مسئله مثبت بودن اضلاع b و c است که همواره این شرط محقق میباشد

تبصره - در کلیه حالات فوق میتوان مساحت مثلث را از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}bc$ که همیشه قابل محاسبهٔ لگاریتمی است تعیین نمود

اینک برای نمونه یکی از حالات کلاسیک را با معلومات عددی حل میکنیم

حالت سوم

معلومات
$a=۳۷۴۰,۹۵۷$
$b=۲۰۵۴,۶۷۰$

مجهولات
$B=۳۳^\circ\ ۱۸'\ ۵۲''$
$C=۵۶^\circ\ ۴۱'\ ۷''$
$c=۳۱۲۶,۱۹۳$

$$tg\frac{C}{۲}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \qquad B=۹۰-C$$

$$c=\sqrt{(a-b)(a+b)}$$

محاسبات اصلیه

اول محاسبه C

$\log(a-b)=۳,۲۲۶۹۳$
$colog(a+b)=\bar{۴},۲۳۶۸۹$

$۲\log tg\frac{C}{۲}=\bar{۱},۴۶۳۸۳$
$\log tg\frac{C}{۲}=\bar{۱},۷۳۱۹۲$

$\frac{C}{۲}=۲۸^\circ\ ۲۰'\ ۳۳''$
$C=۵۶^\circ\ ۴۱'\ ۷''$

دوم محاسبه c

$\log(a-b)=۳,۲۲۶۹۳$
$\log(a+b)=\bar{۴},۲۳۶۸۹$

$۲\log c=۶,۹۹۰۰۳$
$\log c=۳,۴۹۵۰۱$

$c=۳۱۲۶,۱۹$

محاسبات فرعیه

$a-b=۱۶۸۵,۲۸۷$
$a+b=۵۷۹۵,۶۲۷$

اول محاسبه $\log(a-b)$

$\log(a-b)=۳,۲۲۶۹۳$

دوم محاسبه $\log(a+b)$

$\log(a+b)=۳,۷۶۳۱۰$
$colog(a+b)=\bar{۴},۲۳۶۸۹$

حل مثلث قائم الزاویه در غیر حالات کلاسیک

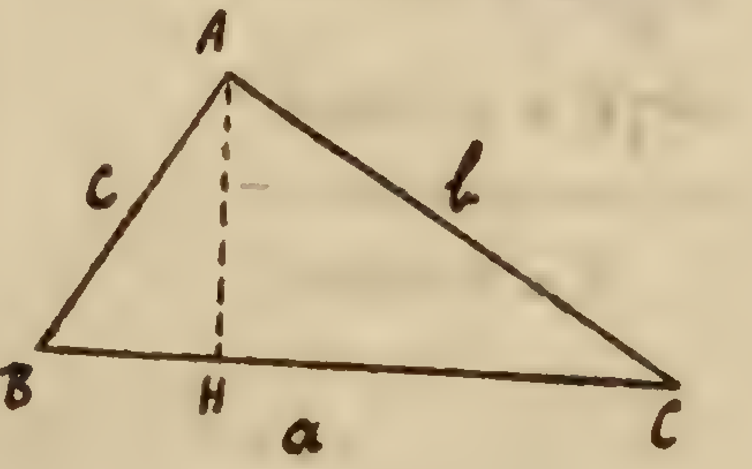
۷۲ - **قاعده کلی** - بطور کلی برای حل مثلث قائم الزاویه در غیر حالات کلاسیک بین معلومات مسئله و اجزاء اصلیه روابطی بدست میآوریم این روابط با روابط موجوده بین اجزاء اصلیه مثلث تشکیل دستگاه معادلاتی میدهد که از حل آن اجزاء مجهوله مثلث مشخص میشود برای مثال مسئله ذیل را حل میکنیم

مسئله - در مثلث قائم الزاویه ABC وتر BC معلوم و بطول a است و $BH + AH = \ell$ (H موقع ارتفاع وارد بر وتر و ℓ طولی است معلوم)
اولاً مطلوبست حل و بحث مثلث ثانیاً بوجه هندسی مثلث را رسم نموده بحث کنید

اولاً - چون $BH = c \cos B$ و $AH = c \sin B$

لذا دستگاه چهار معادله چهار مجهولی ذیل نتیجه میشود

$$B + C = \frac{\pi}{2}$$
$$b = a \sin B$$
$$c = a \cos B$$
$$c \sin B + c \cos B = \ell$$



و چون در معادله اخیر دستگاه بجای c مساویش را قرار دهیم معادله برحسب خطوط مثلثاتی زاویه B بدست میآید $a \sin B \cos B + a \cos^2 B = \ell$

و بفرض $\operatorname{tg} B = t$ معادله اخیر چنین میشود $\ell t^2 - at + \ell - a = 0$ (1)

از حل این معادله tg زاویه B و از آنجا زاویه B معلوم میشود و از معادلات اول دستگاه فوق زاویه C و اضلاع b و c بدست میآید

بحث - برای اینکه مسئله دارای جواب باشد باید $0 < B < \frac{\pi}{2}$
و لذا باید معادله (1) اولاً دارای یک ریشه مثبت باشد

شرط اینکه معادله (1) دارای یک ریشه باشد آنست که $\frac{c}{a} < 0$ و یا $\ell - a < 0$

و از آنجا $\ell < a$

و شرط اینکه معادله (1) دارای دو ریشه مثبت و یا مسئله دارای دو جواب قابل قبول باشد آنست که نامساویهای ذیل برقرار باشد

$\Delta \geq 0$ $4\ell^2 - 4a\ell - a^2 \leq 0$ $0 < \ell \leq \frac{a}{2}(\sqrt{2}+1)$

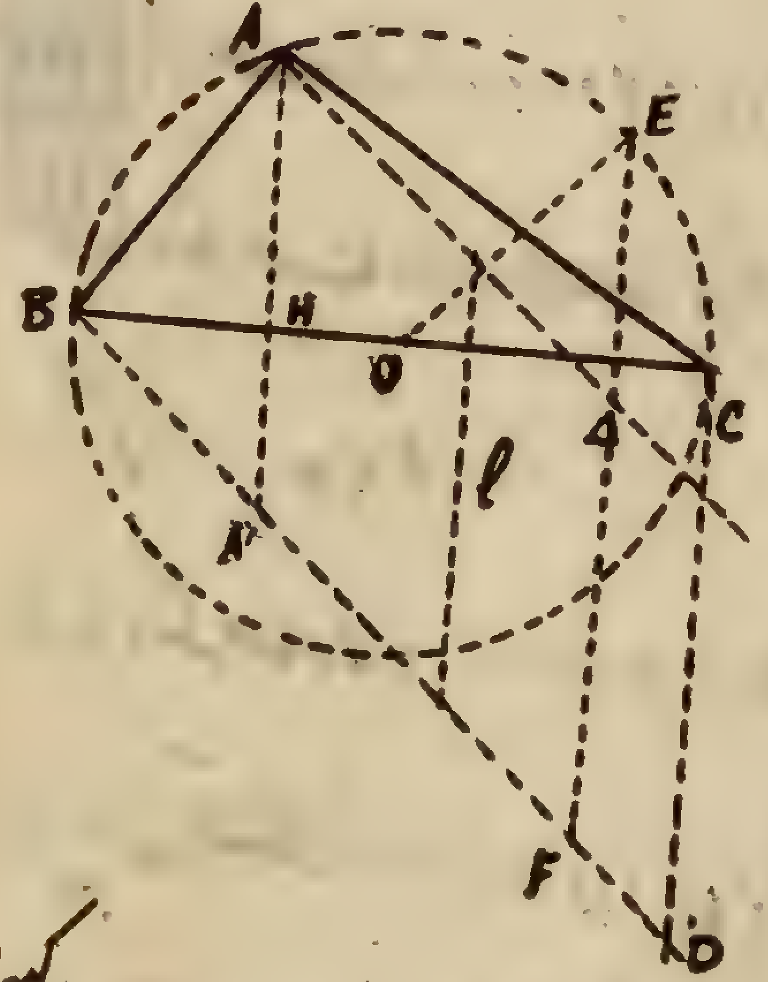
$\frac{c}{a} > 0$ $\ell - a > 0$ $a < \ell$

$-\frac{b}{a} > 0$ $\frac{a}{\ell} > 0$

همیشه برقرار است

از مقایسهٔ آنها شرط دو جواب چنین میشود $\frac{a}{2}(\sqrt{2}+1) \geq h > a$
در حالت خاص اگر $a = h$ باشد یکی از ریشه‌های معادله (۱) صفر و ریشهٔ دیگرش واحد است در اینحالت تنها جواب معادله که در مسئله صدق میکند $x=1$ میباشد که بازاء آن مثلث متساوی الساقین میشود

ثانیاً حل هندسی — چون در مثلث قائم الزاویه ارتفاع AH را بطول BH امتداد دهیم و از رأس B به نقطهٔ A' منتهای AA' وصل کنیم زاویهٔ CBA' مساوی ۴۵ میشود



حال اگر بقطر $BC = a$ دایرهٔ رسم نموده زاویه CBF را مساوی ۴۵ درجه بسازیم و از یکی از نقاط خط BF عمودی بر BC فرود آوریم و از این عمود بطول h جدا نموده و از انتهای آن خط Δ را بموازات BF رسم کنیم محل تقاطع این خط با دایره رأس A میباشد چنانکه از شکل ملاحظه میشود وقتی مسئله دارای یک جواب است که خط Δ محیط نیم دایرهٔ BAC را

در یک نقطه قطع کند لذا باید $0 < h < CH$ ویا $h < a$ واگر $a < h < EF$ ویا $\frac{a}{2}(\sqrt{2}+1) \geq h > a$ باشد مسئله دارای دو جواب است

تمرینات

۱۴۱— ثابت کنید که بین اجزای مثلث قائم الزاویه روابط ذیل برقرار است

$$\cos(B-C) = \sin 2B = \frac{2bc}{a^2}$$

$$\cos(2B-C) = \frac{b}{a^3}(3a^2-4b^2)$$

$$\cos 2B = \frac{c^2-b^2}{a^2} \qquad \sin B \, \mathrm{tg}\, B = \frac{b^2}{ac}$$

$$\mathrm{tg}\, 2B = \frac{2bc}{c^2-b^2} \qquad \sin B + \cos B = \sin C + \cos C$$

$$\frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C} = \mathrm{tg}\, B$$

$$\mathrm{cos\acute{e}c}\, B + \mathrm{cotg}\, B = \frac{a+c}{b} = \frac{b}{a-c}$$

$$\mathrm{s\acute{e}c}\, 2B - \mathrm{tg}\, 2C = \frac{c+b}{c-b}$$

$$\sin^2 B = \cos(A-B)\cos C \qquad \mathrm{cotg}\,\frac{B}{2} = \frac{1+\cos B}{\sin B}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

$$\mathrm{tg}\,2C = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,C - \mathrm{tg}\,B)$$

۱۴۲- مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی قائم‌الزاویه (قائمه در رأس A) که معلومات آن بترتیب عبارت باشند:

B, h

B, r (شعاع دایره محاطیه داخلی)

$B, 2p$

B, S

$B, b+c=l$

$B, b-c=l$

$B, a+b=l$

$B, a-b=l$

$B, a+h=l$

$B, a-h=l$

B, v_c (طول نصف‌الزاویه C)

$a, b+c=l$

$a, b-c=l$

$b, a+c=l$

$b, a-c=l$

$a, b^2-c^2=k^2$

a, h

a, r b, r

$2p, h$

$a+2b=l\ ,\ a+c=m$

ضلع b و زاویه‌ای که میانهٔ این ضلع با وتر تشکیل میدهد

۱۴۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطلوبست تعیین زاویهٔ B بقسمی که این رابطه بین اضلاع b و c و ارتفاع وارد بر وتر برقرار باشد: $\frac{1}{b} + \frac{2}{c} = \frac{m}{h_a}$

۱۴۴- a وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC و m^2 سطح دو نصف‌الزاویه داخلی زوایای

B و C میباشد اولاً ثابت کنید که $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin = \frac{m^2}{4a^2}$ ثانیاً بفرض معلوم بودن a و m^2 مثلث را حل و بحث نمائید ثالثاً اگر نقطهٔ O محل تقاطع این دو نصف‌الزاویه باشد ثابت کنید که $BO \times CO = \frac{m^2}{2}$ رابعاً بوسیله رابطه اخیر مثلث را رسم نمائید

۱۴۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC وتر BC بطول a و زاویهٔ حاده B معلوم است اولاً سایر اجزاء مثلث و همچنین ارتفاع و قطعاتیکه این ارتفاع از وتر جدا میکند حساب کنید ثانیاً بفرض معلوم بودن a زاویه B را بقسمی تعیین کنید که حجم شکل حاصل از دوران مثلث حول وتر معادل حجم کره بشعاع R شود

۱۴۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC وتر معلوم و بطول a است اگر $c+a = m(b+a)$ (m عددی است مثبت) اولاً اجزاء مثلث را تعیین نموده بازاء مقادیر مختلفه m بحث کنید ثانیاً فرض میکنیم بازاء دو مقدار m مانند m_1 و m_2 یکی از زوایای حادهٔ مثلث مرتباً مساوی x_1 و x_2 شود ثابت کنید که اگر $m_1 \times m_2 = 1$ باشد زوایای x_1 و x_2 متمم یکدیگرند ثالثاً بازاء $a=15$ و $m=1,125$ اضلاع و سطح این مثلث را حساب کنید

۱۴۷- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (قائمه در رأس A) مفروض است اگر زاویهٔ حاده بین میانه BM و ضلع AB را به α و زاویه بین همین میانه و وتر را به β بنامیم اولاً ظل زوایای α و β را بر حسب ظل زاویهٔ B معلوم نموده هر یک از زوایای α و β را بفرض $B=60°$ حساب کنید ثانیاً بفرض معلوم بودن زاویه β زاویهٔ

B را تعیین نماید ثالثاً زاویهٔ B را قسمی معلوم کنید که زاویه α دو برابر B شود

۱۴۸- مثلث قائم الزاویهٔ ABC بوتر معلوم a مفروض است بقطر ارتفاع AH دایره‌ای رسم میکنیم فرض میکنیم این دایره اضلاع AB و AC را در نقاط M و N قطع کند اولاً ثابت کنید که چهار نقطه M و N و B و C بر محیط یک دایره واقعند ثانیاً برحسب ضلع a و زاویه B مساحت چهارضلعی $BCNM$ را تعیین کنید ثالثاً زاویه B را قسمی معلوم کنید که نسبت سطح این چهارضلعی بسطح دایره AH مساوی مقدار مثبت K شود

۱۴۹- در مثلث قائم الزاویهٔ ABC منصف الزاویه داخلی زاویه B بطول l است مطلوبست تعیین زاویه B بقسمی که اولاً ضلع c و l معلوم باشند ثانیاً a و l معلوم باشند ثالثاً در هر یک از حالات بازاء مقادیر مختلفه l بحث نموده رابطه بین a و l قسمی تعیین کنید که مثلث مفروض متساوی الساقین شود

۱۵۰- در نیم‌دایره بقطر $AB=2R$ وتر AD که با قطر زاویهٔ 2α را تشکیل داده رسم شده است چون از نقاط B و D بنقطهٔ C وسط قوس BD وصل کنیم اولاً برحسب R و α اضلاع و اقطار چهارضلعی $ABCD$ را حساب نموده از آنها رابطه بطلمیوس را بدست آورید ثانیاً α را طوری تعیین کنید که محیط این چهارضلعی مساوی $4Rm$ شود (بحث)

۱۵۱- مثلث متساوی الاضلاع ABC بضلع a مفروض است بر رأس A خط $Z'Z$ واقع در داخل زاویه BAC، (نقطه C در امتداد خط AC وطرف دیگر رأس A است)

دوران نموده بفرض اینکه تصاویر رؤس B و C بر این محور نقاط B' و C' باشد اولاً زاویه $BAZ=x$ را قسمی تعیین کنید که سطح چهارضلعی $BB'C'C$ مساوی K^2 شود بازاء مقادیر مختلفه K^2 بحث کنید ثانیاً صحت رابطه $\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2=a^2\left[\cos^2(x+30^\circ)+\frac{1}{2}\right]$ را تحقیق نموده زاویه x را قسمی تعیین کنید که این عبارت ماکزیمم شود

۱۵۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ضلع AB کوچکتر از AC میباشد و نقطه D محل تقاطع منصف الزاویه داخلی زاویه A با وتر BC میباشد اگر از نقطه D عمودی بر وتر BC اخراج کنیم و فرض کنیم ضلع AC را که نقطه E قطع کند اولاً مطلوبست محاسبه اضلاع مثلث CDE برحسب اضلاع مثلث ABC و ثابت کنید که $BD=DE$ ثانیاً ثابت کنید که $\frac{CE}{CA}=\frac{1+tg^2 C}{1+tg\, C}$ بعلاوه تغییرات این نسبت را برحسب متغیر $\hat{C}$ معلوم نموده ثابت کنید که می‌نیمم آن بازاء $C=\frac{\pi}{8}$ است

مثلثات غیر مشخص

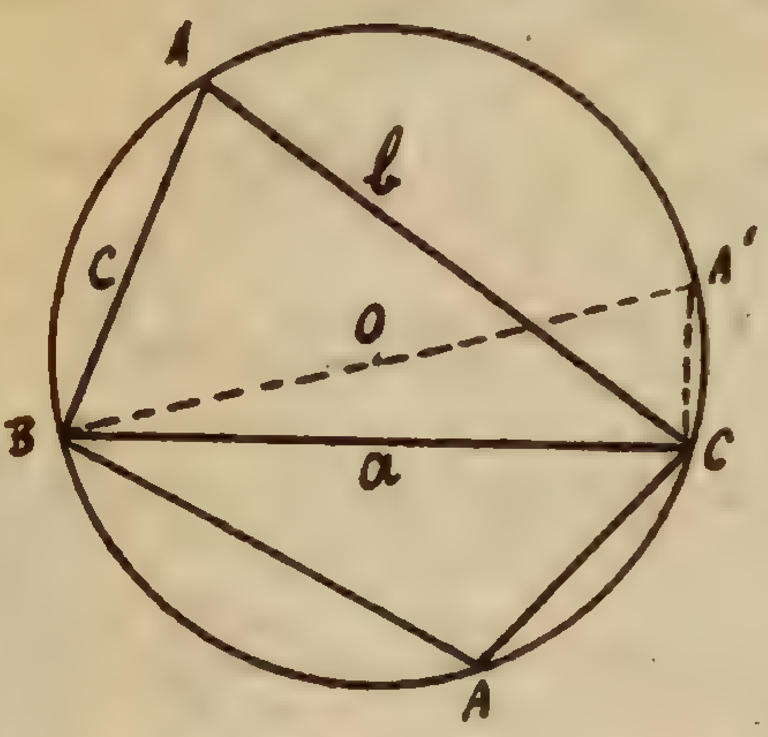
۱- روابط بین اجزاء اصلیه مثلث

۷۲- دستگاه اول - قضیه ۱ - در هر مثلث مابین زوایای A و B و C و اضلاع متناظرهٔ a و b و c روابط ذیل برقرار است

$$I\begin{cases}A+B+C=180^\circ\\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\end{cases}$$

رابطهٔ اول در هندسه ثابت شده است

برای تحقیق روابط دوم و سوم دایره محیطیه مثلث ABC را رسم نموده قطر BA' را وصل میکنیم چون شعاع دایره محیطیه را R فرض کنیم از مثلث قائم الزاویه $A'BC$ حاصل میشود $\frac{a}{\sin A'} = 2R$ و چون A' مساوی با زاویهٔ A است بنابراین $\frac{a}{\sin A} = 2R$ و بهمین طریق معلوم میشود که $\frac{b}{\sin B} = 2R$ و $\frac{c}{\sin C} = 2R$ ولذا از مقایسه آنها نتیجه میشود $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



تبصره ۱ـ از قضیه فوق معلوم میشود که در مثلث نسبت هر ضلع بجیب زاویهٔ مقابل مساوی قطر دایره محیطیه مثلث است

تبصره ۲ـ باید دانست که روابط دستگاه I از یکدیگر متمایز میباشند چه مثلاً رابطه $A + B + C = 180^\circ$ نمیتواند نتیجه ترکیب رابطهٔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ و $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ باشد زیرا در دو رابطه اخیر ضلع a وجود ندارد و قس علیهذا

عکس قضیهٔ ۱ـ هرگاه بین طولهای مثبت a و b و c و زوایای مثبت

A و B و C که هر یک کوچکتر از ۱۸۰ درجه اند روابط دستگاه I برقرار باشد فقط یک مثلث میتوان یافت که اضلاعش a و b و c و زوایایش A و B و C باشد زیرا اگر با معلومات a و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ مثلثی رسم نموده فرض کنیم که زاویه سوم آن A' و دو ضلع دیگرش b' و c' باشد بر وفق قضیه قبل حاصل میشود

$$A' + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C}$$

که با مقایسه با روابط دستگاه I نتیجه میشود $A' = A$ ، $b = b'$ ، $c' = c$

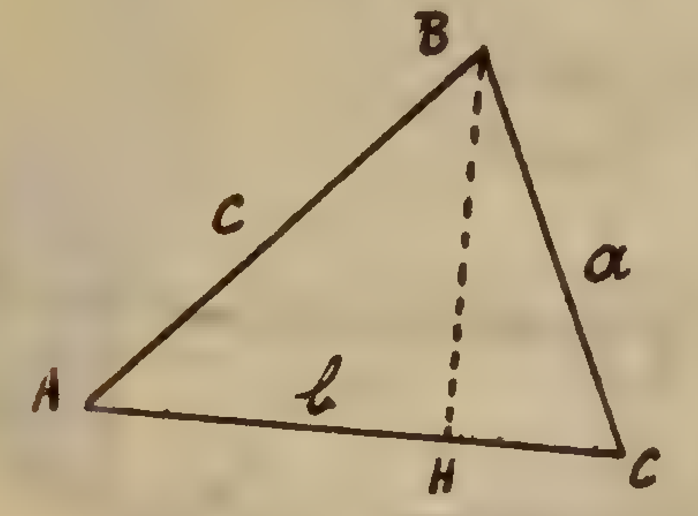
تبصره ـ هرگاه بین جیب زوایای مثلثی رابطهٔ متجانسه برقرار باشد (یعنی کلیه جمل رابطه مفروض نسبت بجیب از یک درجه باشند) چون بجای $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ بترتیب مساویشان $\frac{a}{2R}$ و $\frac{b}{2R}$ و $\frac{c}{2R}$ را بگذاریم رابطهٔ متجانسی نسبت باضلاع مثلث نتیجه میشود پس همواره میتوان در رابطه متجانسهٔ بین جیب زوایای مثلث جیب را باضلاع متناظره تبدیل نمود و بالعکس چنانکه اگر در مثلثی $2b = a + c$ باشد نتیجه میشود $2\sin B = \sin A + \sin C$

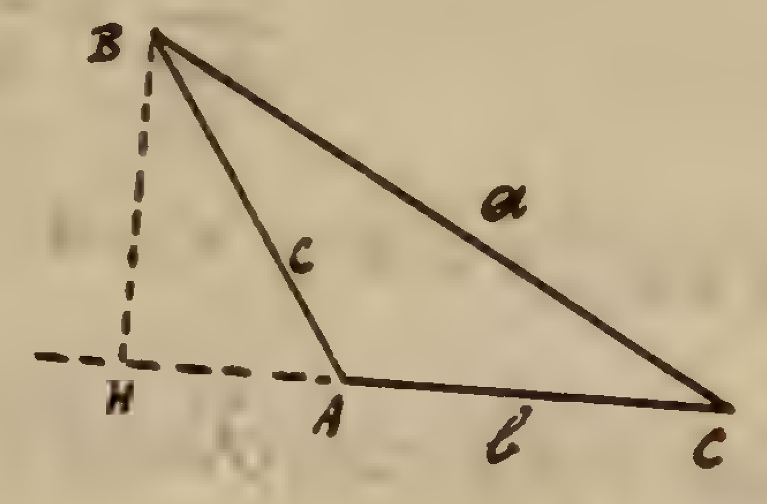
۷۳ـ دستگاه دوم ـ قضیه ۲ـ در هر مثلث مابین اضلاع و زوایای آن روابط

ذیل برقرار است

$$II \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

چون ارتفاع وارد از راس B را رسم میکنیم اولاً برحسب اینکه زاویه A حاده باشد





موافق یکی از قضایای هندسه نتیجه میشود:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2a \times AH$$

وچون $AH = c \cos A$ لذا
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ac \cos A$$

ثانیاً بفرض اینکه زاویهٔ A منفرجه باشد میتوان چنین نوشت:
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2a . AH$$
وچون $AH = c \cos(180^\circ - A) = -c \cos A$

لذا
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

بهمین طریق میتوان روابط دیگر را اثبات نمود

عکس قضیه ۲ - اگر بین طولهای مثبت a و b و c وزوایای مثبت A و B و C که هریک کوچکتر از ۱۸۰ درجه اند روابط دستگاه II برقرار باشد همواره یک مثلث باضلاع a و b و c وزوایای متناظره A و B و C موجود است

چون مثلث $AB'C'$ را با معلومات $AC = b$ و $AB = c$ وزاویه بینهای A رسم کنیم وفرض کنیم که ضلع سومش a' و دو زاویه دیگرش B' و C' باشد موافق قضیه ۲ دستگاه ذیل نتیجه میشود

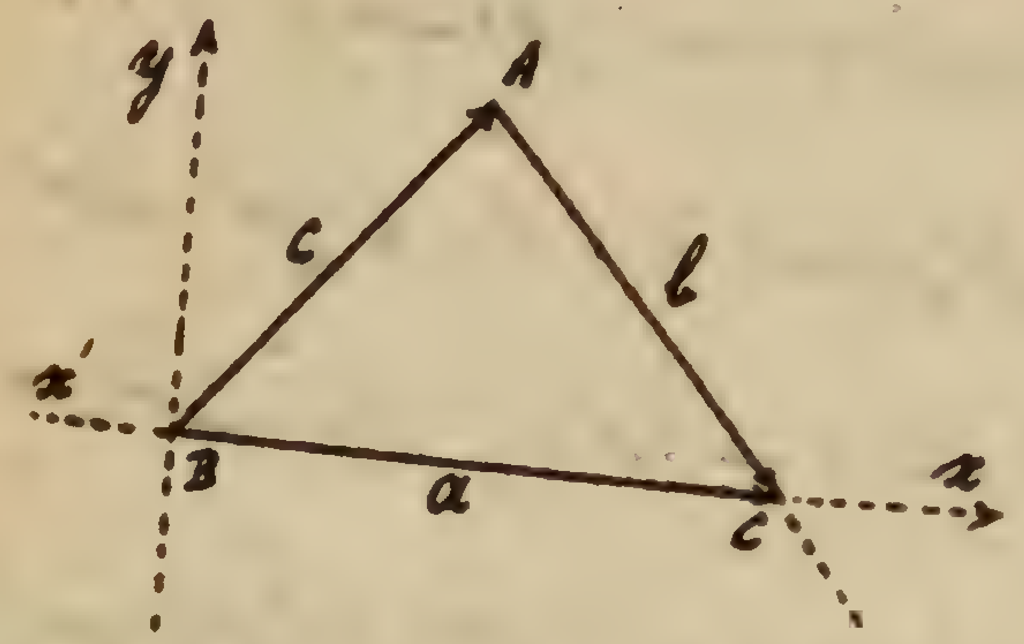
$$\begin{cases} a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a'^2 + c^2 - 2a'c \cos B' \\ c^2 = a'^2 + b^2 - 2a'b \cos C' \end{cases}$$

از مقایسهٔ با روابط دستگاه II بسهولت معلوم میشود که $a = a'$ و $B = B'$ و $C = C'$

دستگاه III قضیه ۳ - در هر مثلث مابین اضلاع وزوایای آن روابط ذیل برقرار است

$$III \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

درروی اضلاع مثلث ABC جهت BAC را جهت مثبت اختیار میکنیم در اینصورت حامل BC را بتوان مجموع هندسی دو حامل BA و AC فرض نموده رابطه ذیل را نوشت



$$(BC) = (BA) + (AC)$$

که بنا بر قضیه تصاویر حاصل میشود :

$$p^{(BC)} = p^{(BA)} + p^{(AC)}$$

حال چون منکسر BAC را بر محور Bx منطبق بر BC قائماً تصویر کنیم حاصل میشود

$$BC \cdot \cos(BC, Bx) = BA \cdot \cos(BA, Bx) + AC \cdot \cos(AC, Bx)$$

یا

$$a = b \cos C + c \cos B$$

و بهمین وجه روابط دیگر دستگاه فوق معلوم میشود

تبصره - اگر منکسر BAC را بر محوری عمود بر BC تصویر کنیم معلوم میشود که

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{یا} \quad c \sin B - b \sin C = 0$$

پس بوسیلهٔ این طریقه نیز ممکن است که روابط اخیر دستگاه I را بدست آورد

عکس قضیه ۳ - عکس این قضیه نیز مانند عکس قضایای ۱ و ۲ اثبات میشود

تعادل دستگاهها

بسهولت معلوم میشود که هر یک از دستگاههای I و II و III شامل روابطی متمایز و مستقل از یکدیگر میباشند ولی این سه دستگاه با یکدیگر متعادلند یعنی میتوان از هر دستگاه روابط دو دستگاه دیگر را بدست آورد

فرض میکنیم ما بین زوایای مثلث A و B و C که هر یک کوچکتر از ۱۸۰ درجه اند و طولهای مثلث a و b و c روابط یکی از دستگاهها مثلاً دستگاه I برقرار باشد بنا بر عکس قضیهٔ I لازم میآید که فقط یک مثلث بزوایای A و B و C و اضلاع a و b و c بتوان طرح نمود و در این مثلث بنا بر قضیه ۲ و ۳ روابط دستگاه II و III برقرار خواهد بود بطریقیکه بفرض وجود روابط دستگاه I ما بین مفروضات فوق روابط دستگاه II و III را میتوان نتیجه گرفت

بوجه دیگر نیز ممکن است تعادل این دستگاهها را اثبات نمود

اتحاد دستگاههای I و II - اولاً استخراج روابط دستگاه II از دستگاه I -

مثلاً میخواهیم از روابط دستگاه I رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ را استخراج کنیم چون از زوایا فقط زاویه A موجود است لذا باید در روابط دستگاه

زوایای B و C را حذف نمود در اینصورت مرتباً حاصل میشود :

$$A = 180^\circ - (B+C)$$

$$\sin A = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B\cos^2 C + \sin^2 C\cos^2 B + 2\sin B\cos C\sin C\cos B$$

$$= \sin^2 B(1-\sin^2 C) + \sin^2 C(1-\sin^2 B) + 2\sin B\cos C\sin C\cos B$$

$$= \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B\sin C(\cos B\cos C - \sin B\sin C)$$

اما $\cos B\cos C - \sin B\sin C = \cos(B+C) = -\cos A$

پس $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$

تساوی اخیر رابطه ایست متجانس نسبت بجیب زوایا لذا حاصل میشود

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

بطریقی مشابه با فوق میتوان سایر روابط دستگاه II را بدست آورد

ثانیاً استخراج روابط دستگاه I از دستگاه II - برای تعیین رابطهٔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

چون در دو رابطهٔ $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \end{cases}$ ضلع c را حذف کنیم رابطهٔ ذیل نتیجه میشود

$$a^2 - b^2 = (a\cos B + b\cos A)(a\cos B - b\cos A)$$

ویا $a^2 - b^2 = a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A$

$$= a^2(1-\sin^2 B) - b^2(1-\sin^2 A)$$

وپس از اختصارات لازمه نتیجه میشود $a^2\sin^2 B = b^2\sin^2 A$

چون a و b و $\sin A$ و $\sin B$ مقادیر مثبت اند لذا حاصل میشود $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

بهمین طریق معلوم میشود که $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

برای تعیین رابطهٔ $A + B + C = 180^\circ$ بمناسبت تجانسی که جمل رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ برحسب اضلاع دارند نتیجه میشود :

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$ فرض میکنیم که $A \geq B \geq C$ باشد چون رابطهٔ اخیر را برحسب $\sin B$ مرتب کنیم معادلهٔ درجه دومی تشکیل میشود که پس از حل ریشه های آن چنین اند $\sin B = \sin(A+C)$ و $\sin B = \sin(C-A)$

جواب دوم با رعایت فرض ممتنع میباشد واز جواب اول نتیجه میشود که یا $B = A + C$ ویا $A + B + C = 180$ اما تساوی $B = A + C$ بمناسبت اینکه $A \geq B \geq C$ است ممتنع بوده ولذا تنها جواب مسئله $A + B + C = 180$ میباشد

تعادل دستگاههای II و III - اولاً استخراج دستگاه III از دستگاه II -

چون دو رابطهٔ اول و دوم دستگاه III را با یکدیگر جمع کنیم حاصل میشود :

$2c^2 = 2c(b\cos A + a\cos B)$ که پس از تقسیم طرفین بر $2c$ که مخالف صفر است نتیجه میشود $c = b\cos A + a\cos B$

ثانیاً استخراج روابط دستگاه II از دستگاه III - چون روابط دستگاه III را مرتباً در a و b و c ضرب نموده و از رابطهٔ اول مجموع دو رابطهٔ دیگر را نقصان کنیم رابطهٔ اول دستگاه II نتیجه میشود و بهمین نحو میتوان روابط دوم و سوم این دستگاه را بدست آورد

تعادل دستگاههای I و III - اولاً استخراج روابط دستگاه III از دستگاه I - از معادلهٔ اول دستگاه I نتیجه میشود $\sin A = \sin(B+C)$ و یا $\sin A = \sin B\cos C + \cos B\sin C$ این تساوی رابطه ایست متجانس بر جیب زوایای مثلث لذا چنین نتیجه میشود $a = b\cos C + c\cos B$ و بهمین طریق سایر روابط دستگاه III بدست میآید

ثانیاً استخراج روابط دستگاه I از دستگاه III - چون در دو رابطهٔ اول دستگاه III $\cos C$ را حذف نمائیم حاصل میشود : $a^2 - b^2 = c(a\cos B - b\cos A)$

و چون در این رابطه بجای c مساویش $a\cos B + b\cos A$ را قرار دهیم پس از اختصارات لازم نتیجه میشود $a^2\sin^2 B = b^2\sin^2 A$ و چون مقادیر a و b و $\sin A$ و $\sin B$ مثبتند لذا $a\sin B = b\sin A$ و بنا بر این $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ و بهمین نحو معلوم میشود که $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

برای تعیین رابطهٔ اول دستگاه I چون روابط دستگاه III نسبت باضلاع روابطی متجانسند لذا تساوی های ذیل نتیجه میشود $\sin A = \sin(B+C)$ و $\sin B = \sin(A+C)$ و $\sin C = \sin(A+B)$ از این روابط معلوم میشود که یا $A+B+C = 180^\circ$ و یا

$$\begin{cases} A = B+C \\ B = A+C \\ C = A+B \end{cases}$$

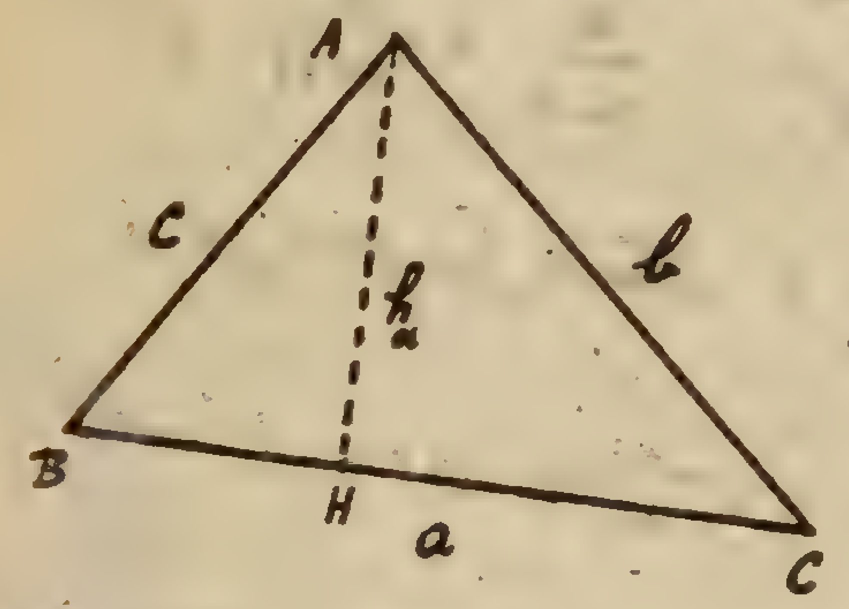
دستگاه اخیر ممتنع است زیرا نتیجه میشود که $A = 0$ و $B = 0$ و $C = 0$

۲- محاسبهٔ اجزاء فرعیهٔ مثلث بحسب اجزاء اصلیهٔ آن

۷۴- چون در بعضی موارد ممکن است بعضی از اجزاء فرعیهٔ مثلث (از قبیل ارتفاع میانه منصف الزاویه وغیره) جزء معلومات مسئله بوده و یا اینکه در ضمن حل مثلث محتاج بمحاسبهٔ بعضی از اجزاء فرعیهٔ آن باشیم لذا لازم است که مابین اجزاء فرعیهٔ مثلث و

اجزاء اصلیه آن نیز روابطی بدست آوریم که در این قبیل موارد برای محاسبه اجزاء بکار بریم

۱- محاسبهٔ ارتفاع h - چون در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم کنیم



از مثلثات ABH و ACH نتیجه میشود که $h_a = c\sin B = b\sin C$

و بهمین نحو معلوم میشود که

$h_c = a\sin B = b\sin A$ و $h_b = a\sin C = c\sin A$

۲- محاسبهٔ مساحت مثلث S - چون در رابطهٔ

$$S = \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}b\times h_b = \frac{1}{2}c\times h_c$$

بجای ارتفاعات مساویشانرا قرار دهیم معلوم میشود که :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B$$

و با رعایت رابطهٔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ میتوان مساحت مثلث را برحسب یکضلع و جیب زوایای دیگر تعیین نمود

$$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin C\sin B}{\sin(B+C)} = \dots$$

و نیز از دستور هندسی $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ نیز میتوان مساحت

مثلث را بدست آورد

۲- محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطیه R - چون نسبت هر ضلع مثلث بجیب زاویهٔ مقابل آن مساوی قطر دایره محیطه مثلث است لذا

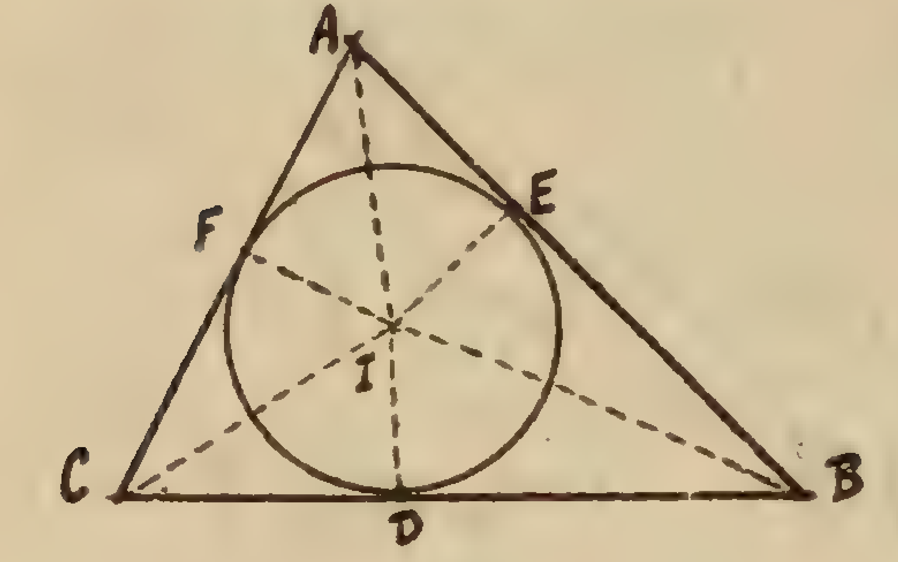
$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

و نیز میتوان از دستورات هندسی $bc = 2Rh_a$ و $abc = 4RS$

شعاع دایره محیطیه را تعیین نمود $R = \frac{bc}{2h_a}$ و $R = \frac{abc}{4S}$ و

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

۳- محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطیه داخلی r - از رابطهٔ هندسی $S = pr$ معلوم میشود که $r = \frac{S}{p}$ و همچنین از مثلثات قائم الزاویه AIE و CIF و BID نتیجه میشود



$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

میتوان r را برحسب اضلاع مثلث حساب نمود و از رابطه فوق معلوم میشود که

$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$ و $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$ و $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$ و

چون $A+B+C=\pi$ لذا بسهولت معلوم میشود که

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

یا $\frac{r^2}{(p-a)(p-b)}+\frac{r^2}{(p-c)(p-a)}+\frac{r^2}{(p-b)(p-c)}=1$

و از آنجا $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

از دستور $S=pr$ با رعایت رابطهٔ اخیر معلوم میشود که

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۴- محاسبهٔ اشعهٔ دوایر محاطیه خارجی (r_a ، r_b ، r_c) - از رابطهٔ هندسی

$$S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$$

معلوم میشود که $r_a=\frac{S}{p-a}$ ، $r_b=\frac{S}{p-b}$ ، $r_c=\frac{S}{p-c}$

و همچنین از مثلث قائم الزاویه ASE و نظایر آن معلوم $r_c=\frac{S}{p-c}$

میشود که $r_a=p\tan\frac{A}{2}$ و $r_b=p\tan\frac{B}{2}$ و $r_c=p\tan\frac{C}{2}$

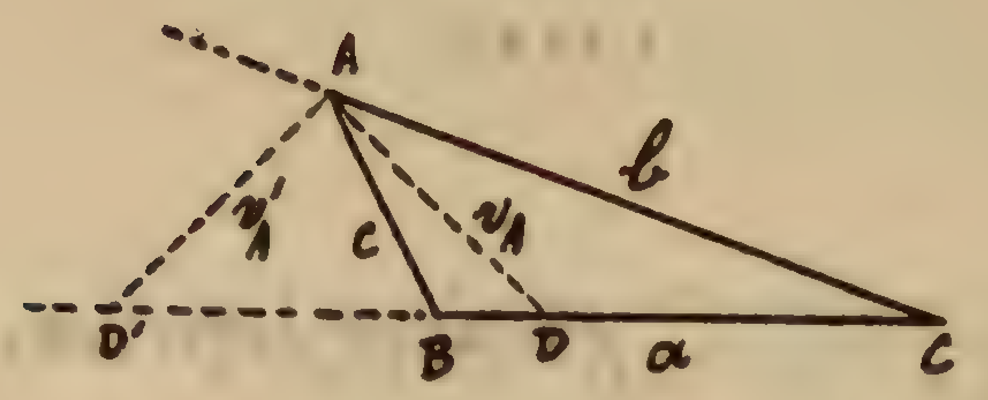
$$r_a\cdot r_b\cdot r_c=p^3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

و

۵- محاسبهٔ منصف الزوایای داخلی مثلث (v_A ، v_B و v_C) -

فرض میکنیم $AD=v_A$ منصف الزاویه داخلی زاویهٔ A باشد چون

$$S.ABC=S.ABD+S.ADC$$



پس

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}v_A c\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}v_A b\sin\frac{A}{2}$$

و از آنجا $v_A=\frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

بهمین نحو معلوم میشود که $v_C=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$ ،

$$v_B=\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}$$

و در هندسه ثابت شده است که : $v_A=\frac{1}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$

$$v_B=\frac{1}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

$$v_C=\frac{1}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

۶- محاسبهٔ منصف الزوایای خارجی مثلث (v'_A ، v'_B ، v'_C) - بفرض $c<b$ چون

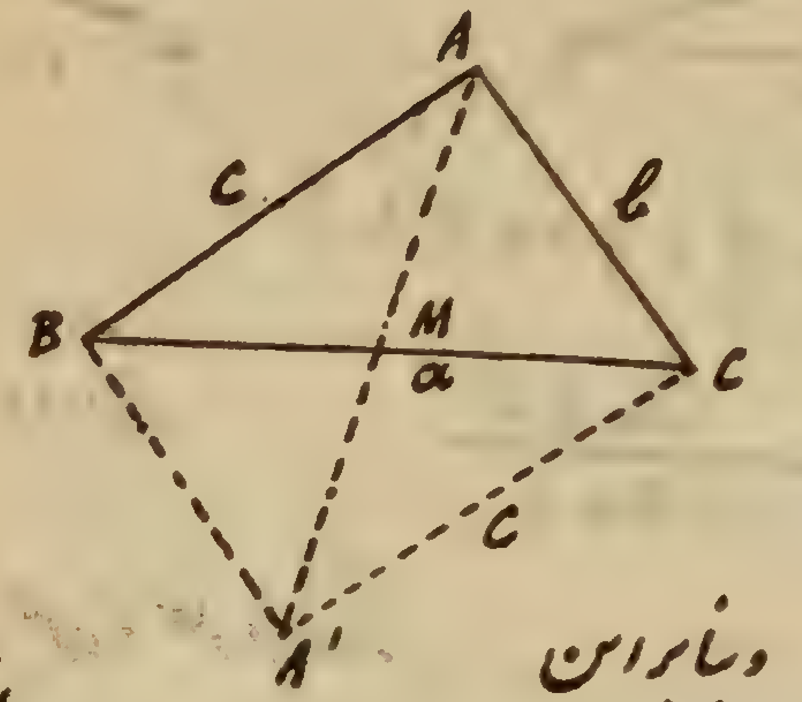
لذا $S.ABC=S.AD'C-S.AD'B$

یا $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}v'_A\cdot b\cdot\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}v'_A\cdot c\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

و بنابراین $bc\sin A=v'_A\cdot b\cdot\cos\frac{A}{2}-v'_A\cdot c\cdot\cos\frac{A}{2}$

$$v'_A=\frac{bc\sin A}{(b-c)\cos\frac{A}{2}}=\frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b-c}$$

۷- محاسبهٔ میانه‌های مثلث (m_a ، m_b ، m_c) - در مثلث ABC



میانه $AM = m_a$ را بطول خود امتداد دهیم در مثلث $AA'C$ این رابطه نتیجه میشود

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{ACA'}$$

و یا $4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ و بنابراین $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$ و بهمین طریق طول سایر میانه‌ها را میتوان حساب نمود

و نیز از دستور هندسی $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$ و نظایر آن طول میانه‌ها بر حسب اضلاع مثلث معلوم میشود

۳- حل و بحث حالات کلاسیک مثلث

۷۵- بطوریکه گفتیم دستگاههای I و II و III با یکدیگر معادل میباشند بنابراین هریک از آنها را میتوان در حل اجزاء مثلث بکار برد ولی باید دانست که دستگاه I بر دو دستگاه دیگر مزیت دارد چه هریک از روابط دستگاه III شامل پنج جزء از اجزاء مثلث است و بعلاوه روابط دستگاههای II و III قبل از تبدیل هیچیک قابل محاسبه بوسیله لگاریتم نیستند در صورتیکه روابط دستگاه I اولاً شامل سه یا چهار جزء از اجزاء مثلث بوده و ثانیاً قابل محاسبه بوسیله لگاریتم میباشند.

حالت اول - مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن یک ضلع و دو زاویه معلوم باشد.

فرض میکنیم که ضلع a و دو زاویه طرفین آن یعنی B و C معلوم باشد از دستگاه I مرتباً نتیجه میشود $A = 180° - (B + C)$ و $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ و $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ و از دستور $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$ مساحت مثلث بدست میآید

بحث - شرط امکان مسئله آنست که $0 < A < 180°$ و یا $0 < 180° - (B + C) < 180°$ و بنابراین $0 < B + C < 180°$ بازاء این شرط اضلاع b و c مثبت بوده و مسئله همیشه دارای یک جواب است

حالت دوم - مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن دو ضلع و زاویهٔ بینهما معلوم است

فرض میکنیم دو ضلع b و c و زاویه بینهمای (A) معلوم باشد برای تعیین زوایای B و C از دستگاه I دو معادله دو مجهولی

$$\begin{cases} \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} \\ B + C = 180° - \hat{A} \end{cases}$$

نتیجه میشود

چنانکه میدانیم برای حل این دستگاه معادلهٔ اول آنرا میتوان مرتباً چنین نوشت

$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$(1)\quad \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

بفرض $b > c$ نتیجه میشود $B > C$ و بنابراین $\frac{B-C}{2}$ مثبت خواهد بود حال اگر زاویهٔ حادهٔ α را قسمی تعیین کنیم که $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$ باشد حاصل میشود $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}\alpha$ و از آنجا $\frac{B-C}{2} = \alpha$ و لذا دستگاه ذیل نتیجه میشود :

$$\begin{cases} \frac{B-C}{2} = \alpha \\ \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \end{cases}$$

جوابهای این دستگاه چنین اند

$(2)\quad B = 90 + \alpha - \frac{A}{2}$ و $C = 90 - \alpha - \frac{A}{2}\quad(3)$ و بنابراین

ضلع a از دستور ذیل بدست میآید

$$(4)\quad a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

بحث – چون ظل قوس $\frac{B-C}{2}$ معلوم است لذا بوسیله رابطهٔ (۱) همواره میتوان زاویهٔ حادهٔ α را تعیین نمود و برای اینکه زوایای B و C قابل قبول باشند باید هر یک

بین صفر و ۱۸۰ درجه واقع باشند از رابطه (۲) معلوم میشود که زاویه B قابل قبول است و برای اینکه زاویه C قابل قبول باشد باید $\alpha < 90 - \frac{A}{2}$ و چون طرفین این نامساوی زوایای حاده اند لذا نتیجه میشود $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$ و یا $\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2} < \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$ و بنابراین $\frac{b-c}{b+c} < 1$ و یا $c > 0$ و چون این شرط همواره موجود است بنابراین مسئله همیشه دارای یک جواب خواهد بود

تبصره ۱ – بطریق دیگر نیز ممکن است ضلع a را تعیین نمود رابطهٔ دوم دستگاه a را میتوان چنین نوشت :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{b+c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

و یا

$$(5)\quad a = \frac{(b+c)\sin A}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

اگر لگاریتم b و لگاریتم c در دست نباشد دستور اخیر بر دستور (۴) مزیت دارد زیرا برای تعیین زاویه α لگاریتم $b+c$ استخراج شده و لذا برای محاسبه a محاسبه دو لگاریتم جدید کافی است درصورتیکه بوسیله دستور (۴) سه محاسبهٔ لگاریتمی لازم است

تبصره ۲ – وقتی که لگاریتم b و لگاریتم c معلوم باشند دستور (۱) قابل محاسبهٔ لگاریتمی نیست درینحال برای تبدیل آن میتوان چنین نوشت

$\cot\frac{A}{2}\,\frac{1-\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}} = \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ وچون $\frac{c}{b}$ را مساوی $\operatorname{tg}\varphi$ فرض کنیم دستور (۱) بصورت قابل محاسبهٔ ذیل درمیآید

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}(45°-\varphi)\cot\frac{A}{2}$$

تبصره ۳ - میتوان مستقیماً ضلع a را بدون محاسبهٔ زاویه B بوسیلهٔ دستور $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$ حساب نمود وچنانکه میدانیم (۶۲) برای محاسبه a باید عبارت $\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ را مساوی $\operatorname{tg}\varphi$ فرض نمود در نتیجه ضلع a چنین میشود $a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\varphi}$ از مقایسه این رابطه با دستور قبل معلوم میشود که زاویه φ همان زاویه $\alpha=\frac{B-C}{2}$ است

حالت سوم (حالت مشکوک) - مطلوبست حل وبحث اجزاء مثلثی که از آن دو ضلع وزاویهٔ مقابل یکی از آنها معلوم باشد

فرض میکنیم اضلاع a و b وزاویه A مقابل بضلع a معلوم باشند از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ معلوم میشود که $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ (۱) از این رابطه زاویهٔ B واز رابطهٔ $C=180°-(A+B)$ (۲) زاویه C بدست میآید

ضلع c ومساحت مثلث از روابط ذیل معلوم میشوند : $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ (۳)

و $S=\frac{1}{2}ab\sin C$

بحث - وقتی مثلث موجود است که زوایای B و C محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه بوده وضلع c مثبت باشد

چون جیب زاویه B معلوم است لذا رابطه (۱) وقتی دارای جواب است که $a \geq b\sin A$ باشد

اولاً $a=b\sin A$ - دراینصورت روابط (۱) و (۲) و (۳) بصورت ذیل درمیآیند $\hat{B}=90°$ و $\hat{C}=90°-\hat{A}$ و $c=a\cos A$

درینحالت تنها شرط امکان مسئله حاده بودن زاویه A است زیرا بازاء این شرط زاویهٔ C وضلع c مثبت ولذا قابل قبولند

ثانیاً $a>b\sin A$ - درینحالت زاویهٔ حاده β را قسمی میتوان یافت که $\sin\beta=\frac{b\sin A}{a}$ باشد وچون زاویه B بین صفر و ۱۸۰ درجه واقع است لذا $B_1=\beta$ و $B_2=180°-\beta$ برای زاویه B و درنتیجه دو جواب $C_1=180°-(A+\beta)$ و $C_2=\beta-A$ برای زاویه C بدست میآید

برای تحقیق اینکه درینحالت چه وقت مسئله دارای جواب است دوحالت تشخیص میدهیم

$A < 90^\circ$ — درینصورت زاویه B_1 قابل قبول است و برای اینکه زاویهٔ B_2 نیز قابل قبول باشد باید $B > A$ و چون طرفین این نامساوی زوایای حاده اند لذا نتیجه میشود $\sin B > \sin A$ ویا $\frac{b \sin A}{a} > \sin A$ و از آنجا $a < b$ پس معلوم میشود که درینحالت وقتی مسئله دارای دو جواب است که $a < b$ باشد و بازاء $a > b$ یک مثلث جواب مسئله است

$A > 90^\circ$ — درینحالت زاویه B_2 قابل قبول نبود و برای اینکه زاویه B_1 بتواند زاویهٔ مثلث باشد باید $180 - A > B$ و چون طرفین این نامساوی زوایای حاده اند لذا $\sin A > \sin B$ که از آن شرط جواب چنین میشود $a > b$ بازاء این شرط مسئله دارای یک جواب قابل قبول است

خلاصه مطالب فوق را میتوان بصورت ساده ذیل نوشت

$b \sin A > a$ — مسئله جواب ندارد

$b \sin A = a \begin{cases} A < 90^\circ & \text{«یک جواب»} \\ A \geq 90^\circ & \text{«جواب ندارد»} \end{cases}$

$b \sin A < a \begin{cases} A \geq 90^\circ \begin{cases} a > b & \text{«یک جواب»} \\ a < b & \text{«جواب ندارد»} \end{cases} \end{cases}$

$b \sin A < a \begin{cases} A < 90^\circ \begin{cases} a > b & \text{«مسئله یک جواب دارد»} \\ a < b & \text{«دو جواب دارد»} \end{cases} \end{cases}$

جدول بحث فوق را بطرز دیگر برحسب مقایسه مقادیر a و b با یکدیگر میتوان تشکیل داد

$a > b$ — مسئله یک جواب دارد

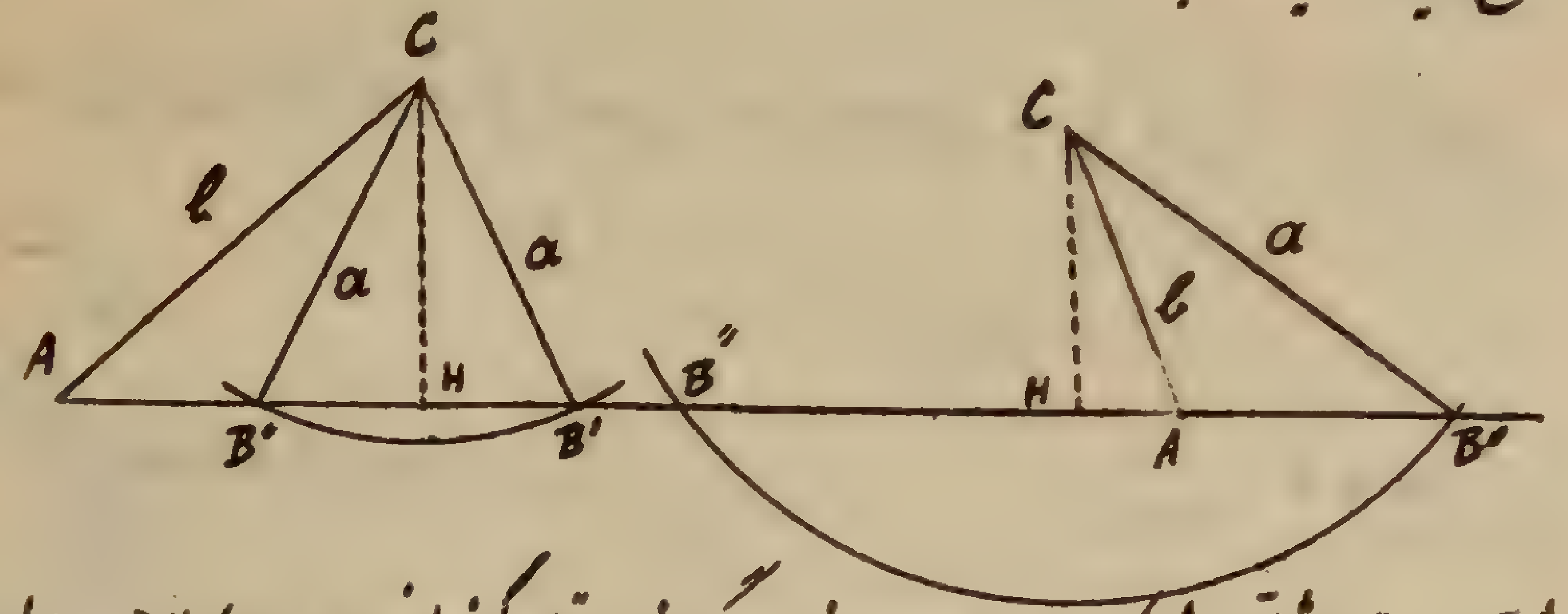
$a = b \begin{cases} A < 90^\circ & \text{«یک جواب»} \\ A \geq 90^\circ & \text{«جواب ندارد»} \end{cases}$

$a < b \begin{cases} b \sin A > a & \text{«جواب ندارد»} \\ b \sin A < a \begin{cases} A < 90^\circ & \text{«دو جواب»} \\ A \geq 90^\circ & \text{«جواب ندارد»} \end{cases} \end{cases}$

از مطالب فوق معلوم میشود که وقتی مسئله دارای یک جواب است که زاویه معلوم A مقابل بضلع اعظم باشد

تبصرهٔ — بوسیلهٔ رسم هندسی نیز ممکن است مطالب فوق را استنباط نمود زاویه مساوی A ساخته و بریکی از دو ضلع آن طول AC را مساوی b جدا نموده

و بمرکز C باشعاع a دایره رسم میکنیم فرض میکنیم CH عمود وارد از رأس بر ضلع دیگر زاویه A باشد



مثلث وقتی مشخص میشود که دایرهٔ C ضلع دیگر زاویه را قطع کند لذا باید $CH < a$ و یا $b \sin A < a$ بازاء این شرط دایره C ضلع دیگر زاویه A را در دو نقطه B′ و B″ قطع میکند اگر زاویه A را حاده فرض کنیم رأس سوم مثلث مطلوب باشد و برای اینکه رأس B″ نیز قابل قبول باشد باید $a < b$ اما اگر زاویه A منفرجه باشد تنها جواب B′ وقتی قابل قبول است که $a < b$ باشد

تبصرهٔ ۲ — مستقیماً میتوان ضلع c را بدون رجوع بزاویهٔ C از دستور $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ حساب نمود رابطه اخیر معادله درجه دوم است برحسب مجهول c

$$c^2 - 2bc\cos A + b^2 - a^2 = 0$$

تنها جواب مثبت این معادله قابل قبول است

از بحث این معادله میتوان شرایط امکان مسئله را بدست آورد

معادله فوق وقتی دارای یک جواب قابل قبول است که $\frac{c}{a} < 0$ و یا $a > b$ باشد

و وقتی دارای دو جواب قابل قبول است که هر دو ریشه آن مثبت باشند و لذا باید

$$\Delta \geq 0 \qquad b^2\cos^2 A - b^2 + a^2 \geq 0 \qquad \text{یا} \qquad a \geq b\sin A$$

$$\frac{c}{a} > 0 \qquad b^2 - a^2 > 0 \qquad ، \qquad b > a$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \qquad 2b\cos A > 0 \qquad ، \qquad A < 90^\circ$$

برای تعیین ضلع c چون معادله فوق را حل کنیم چنین نتیجه میشود

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A} \qquad \text{و یا}$$

$$c = b\left[\cos A \pm \sin A\sqrt{\frac{a^2}{b^2\sin^2 A} - 1}\right]$$

چون $\frac{b\sin A}{a}$ را مساوی $\sin\varphi$ فرض کنیم ضلع c بدینصورت درمیآید

$$c = b\,\frac{\sin(\varphi \pm A)}{\sin\varphi} \qquad \text{و یا} \qquad c = b\,\frac{\cos A\sin\varphi \pm \sin A\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

از مقایسهٔ این روابط با روابط قبل معلوم میشود که φ همان زاویه B است

حالت چهارم — مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن سه ضلع معلوم است

بوسیله دستگاه II میتوان زوایای مثلث را تعیین نمود زیرا رابطه این دستگاه معادله ایست یکمجهولی برحسب یکی از زوایا چنانکه از رابطه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ نتیجه میشود $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ دستور اخیر قابل محاسبه لگاریتمی نیست لذا میتوان چنین نوشت

$$1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

پس

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}$$

و بفرض $a+b+c=2p$ روابط فوق چنین میشوند :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad , \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

چون بهمین طریق عمل کنیم دستورات ذیل حاصل میشود :

$$\alpha \begin{cases} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\ \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{cases}$$

از تقسیم روابط این دو دستگاه بر یکدیگر نتیجه میشود :

$$(\gamma) \begin{cases} \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases}$$

زوایای A و B و C را میتوان از روابط دستگاههای فوق بدست آورد اما باید دانست که بدو دلیل محاسبه زوایا بوسیله دستورات (γ) بر دستورات دیگر ترجیح دارد

اولاً در دستورات (γ) محاسبهٔ چهار لگاریتم و در دستورات دیگر محاسبهٔ ۷ لگاریتم لازم است

ثانیاً چنانکه میدانیم محاسبه زاویه بوسیله لگاریتم ظلش دقیقتر تعیین میشود تا بوسیله لگاریتم جیب و یا جیب تمام آن

مساحت مثلث را میتوان از دستور $S = \frac{1}{2} bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ بدست آورد و لذا

$$S = bc \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

و یا

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

بحث — تنها شرط جواب آنستکه مقادیر زیر رادیکالها مثبت باشند

$$p(p-a)(p-b)(p-c) > ۰$$

لذا باید

یا $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) > ۰$ چون یکی از اضلاع مثلاً ضلع a را ضلع اعظم فرض کنیم بسهولت معلوم میشود که دو عامل $(a+c-b)$ و $(a+b-c)$ مثبت بوده ولذا تنها شرط امکان مسئله چنین میشود $b+c-a > ۰$ ویا $a < b+c$ یعنی باید ضلع اعظم کوچکتر از مجموع دو ضلع دیگر باشد بازاء این شرط دستورات فوق برای هر زاویه یک جواب تعیین میکنید ولذا مسئله دارای یک جواب است

تبصره — بین تمام این حالات تنها حالت سوم که محاسبه مجهولات آن منجر بمحاسبه زاویه B میشود چندان دقیق نیست زیرا جیب این زاویه معلوم است

اینک برای نمونه بحل اجزاء مثلث در یکی از حالات کلاسیک میپردازیم

حالت سوم

معلومات	مجهولات	
$a = ۳۱۹۳,۴$	$B' = ۸۳^g,۹۹۵۰$	$B'' = ۱۱۶^g,۰۰۵۰$
$b = ۴۸۰۶,۴$	$C' = ۷۱^g,۵۰۰۴$	$C'' = ۳۹^g,۴۹۰۴$
$A = ۴۴^g,۵۰۴۶$	$c' = ۴۴۷۳,۳$	$c'' = ۲۸۸۴,۵$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \qquad C = ۲۰۰^g - (A+B) \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

محاسبات فرعیه

محاسبه $\log b$

$\log ۴۸۰۶,۰ = ۳,۶۸۱۷۸$

$۴ = ۴$

$\log b = ۳,۶۸۱۸۲$

محاسبه $\log \sin A$

$\log \sin ۴۴,۵۰ = \bar{۱},۸۰۸۵۲$

$۴۶ = ۴$

$\log \sin A = \bar{۱},۸۰۸۵۶$

محاسبه $\log a$

$\log ۳۱۹۳,۰ = ۳,۵۰۴۲۰$

$۴ \quad ۵$

$\log a = ۳,۵۰۴۲۵$

محاسبه $\log \sin C'$

$A = ۴۴,۵۰۴۶$

$B' = ۸۳,۹۹۵۰$

$A+B' = ۱۲۸,۴۹۹۶ \qquad \log \sin C' = \bar{۱},۹۵۴۹۴$

محاسبه $\log \sin C''$

$A = ۴۴,۵۰۴۶$

$B'' = ۱۱۶,۰۰۵۰$

$A+B'' = ۱۶۰,۵۰۹۶ \qquad \log \sin C'' = \bar{۱},۷۶۴۳۹$

محاسبات اصلیه

محاسبه B

$\log b = ۳,۶۸۱۸۲$

$\log \sin A = \bar{۱},۸۰۸۵۶$

$\operatorname{colog} a = \bar{۴},۴۹۵۷۵$

$\log \sin B = \bar{۱},۹۸۶۱۳$

$B' = ۸۳,۹۹۵۰ \qquad B'' = ۱۱۶,۰۰۵۰$

محاسبه ضلع c'

$\log a = ۳,۵۰۴۲۵$

$\log \sin C' = \bar{۱},۹۵۴۹۴$

$\operatorname{colog} \sin A = ۰,۱۹۱۴۴$

$\log c' = ۳,۶۵۰۶۳$

$c' = ۴۴۷۳,۳$

محاسبه ضلع c''

$\log a = ۳,۵۰۴۲۵$

$\log \sin C'' = \bar{۱},۷۶۴۳۹$

$\operatorname{colog} \sin A = ۰,۱۹۱۴۴$

$\log c'' = ۳,۴۶۰۰۸$

$c'' = ۲۸۸۴,۵$

حل و بحث اجزاء مثلث در غیر حالات کلاسیک

۷۶ - بطوریکه میدانیم حل اجزاء مثلث منجر بحل یکدستگاه معادلات سه یا چهار یا پنج و یا شش مجهولی میشود ولی طریقه حل این قبیل دستگاههارا نمیتوان در تحت قواعد کلی در آورد اما میتوان همواره ملاحظات ذیل را که سبب سهولت در حل این قبیل مسائل است در نظر گرفت :

اولاً بطور کلی در حل و بحث اجزاء مثلث بهتر آنست که ابتدا حل مثلث از محاسبهٔ زوایا شروع شود زیرا همینکه زوایا معلوم شد اضلاع بسهولت تعیین میشود و بعلاوه بدین وسیله دستوراتی بدست میآید که بحث در آنها بسیار ساده است

ثانیاً اگر مجموع دو مجهول معلوم باشد سهلتر آنست که تفاضل آنرا حساب نموده تا مجموعشان تشکیل دستگاه دو مجهولی ساده دهد چنانکه اگر در مثلثی زاویهٔ A معلوم باشد چون مجموع زوایای B و C نیز معلوم است لذا برای محاسبه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ کافی است که $B-C$ را حساب کنیم

اینک برای نمونه چند مسئله ذیل را حل میکنیم

مسئله ۱ — در مثلثی زاویهٔ A و ضلع مقابل آن a و مجموع دو ضلع دیگر $l = b + c$ معلوم است مطلوبست حل و رسم مثلث

اولاً محاسبهٔ زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ - از روابط دستگاه (۱) مرتباً حاصل میشود

$$(1)\quad \begin{cases} B + C = 180 - A \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C} \end{cases}$$

بنابراین $\dfrac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{l}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$ و از آنجا $\dfrac{l\sin\frac{A}{2}}{a} = \cos\dfrac{B-C}{2}$ حال اگر فرض کنیم $B > C$ و α کوچکترین زاویهٔ مثبتی باشد بطوریکه $\cos\alpha = \dfrac{l\sin\frac{A}{2}}{a}$ باشد حاصل میشود : $\cos\dfrac{B-C}{2} = \cos\alpha$ و از آنجا $\dfrac{B-C}{2} = \alpha$ که با ملاحظه $\dfrac{B+C}{2} = 90 - \dfrac{A}{2}$ نتیجه میشود :

$$(2)\quad \begin{cases} B = 90 - \dfrac{A}{2} + \alpha \\ C = 90 - \dfrac{A}{2} - \alpha \end{cases}$$

ثانیاً محاسبهٔ اضلاع b و c - از روابط آخر دستگاه (۱) حاصل میشود

$$(۳)\quad \begin{cases} b = \dfrac{a \sin B}{\sin A} \\[2ex] c = \dfrac{a \sin C}{\sin A} \end{cases}$$

بحث – برای اینکه مثلث موجود باشد باید که اولاً $\cos\alpha$ محصور بین صفر و یک باشد ثانیاً اضلاع b و c مثبت باشند ثالثاً زوایای B و C محصور بین صفر و ۹۰ درجه باشند

برای اینکه $\cos\alpha$ محصور بین صفر و یک باشد باید $0 < \dfrac{l \sin\frac{A}{2}}{a} \leqq 1$ (۴)

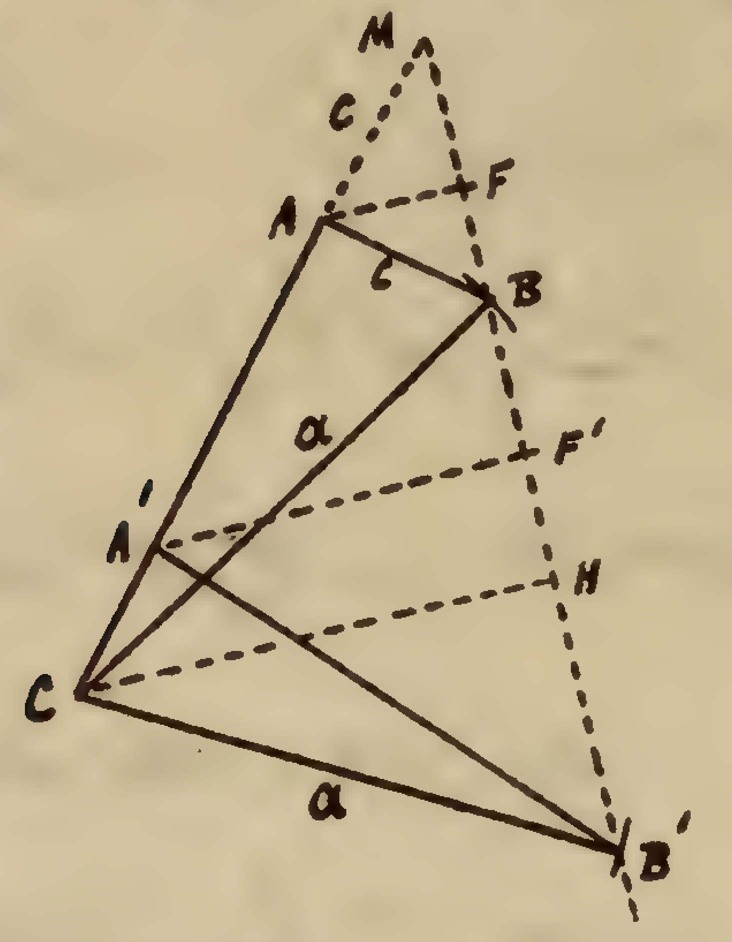
اضلاع b و c مثبت خواهند بود هرگاه زوایای B و C محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه باشند و چون بر طبق رابطه (۱) این دو زاویه کوچکتر از ۱۸۰ درجه میباشند بنابراین کافی است که مثبت باشند اما زاویه B مثبت است و برای اینکه زاویه C نیز مثبت باشد باید $90 - \frac{A}{2} - \alpha > 0$ و از آنجا $\alpha < 90 - \frac{A}{2}$ طرفین این نامساوی زوایای حاده اند بنابراین حاصل میشود $\cos\alpha > \cos\left(90 - \frac{A}{2}\right)$

ویا $\dfrac{l \sin\frac{A}{2}}{a} > \sin\frac{A}{2}$ (۵) از مقایسه روابط (۴) و (۵) نتیجه میشود

$\sin\frac{A}{2} < \dfrac{l \sin\frac{A}{2}}{a} \leqq 1$ و از آنجا شرط امکان مسئله چنین است

$$l \sin\frac{A}{2} \leqq a < l$$

حل هندسی – فرض میکنیم مسئله حل شده و مثلث ABC مثلث مفروض باشد



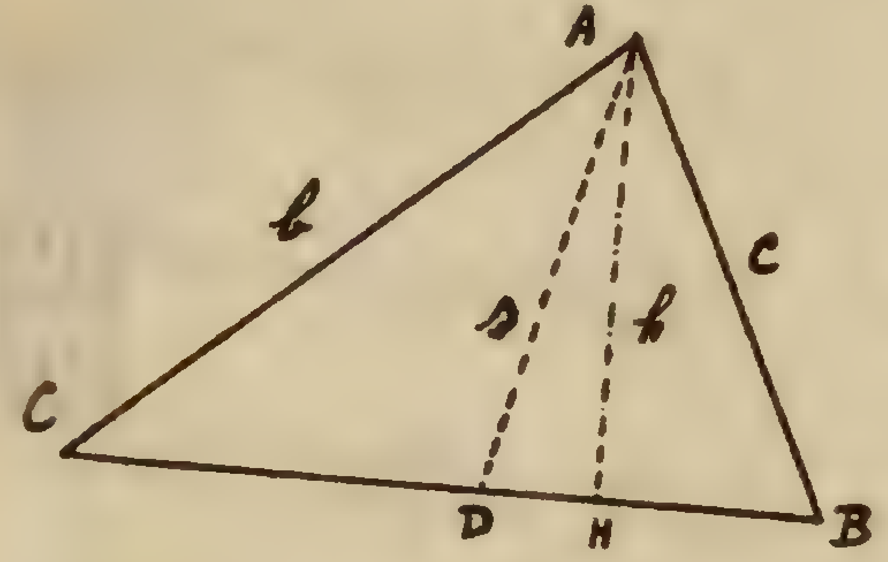
ضلع CA را بمساوی AB امتداد میدهیم درینصورت مثلث ABM متساوی الساقین و زاویه M مساوی $\frac{A}{2}$ میباشد حال در مثلث BMC ضلع $BC = a$ و ضلع $MC = l$ و زاویه M مقابل بضلع a معلوم است آنرا رسم میکنیم بدینطریق که زاویهٔ $M = \frac{A}{2}$ را رسم نموده در روی یک ضلع آن طول $MC = b + c = l$ را جدا نموده نقطهٔ C را مرکز قرار میدهیم و بشعاع a قوسی رسم میکنیم تا ضلع دیگر زاویه را در نقاط B و B' قطع کند وبعد عمود منصف MB و MB' را رسم میکنیم تا MC را در نقاط A یا A' قطع نماید درینصورت مثلث ABC یا $AB'C'$ جواب مسئله خواهد بود

بحث – شرط امکان مسئله آنست که دایره بمرکز C ضلع دیگر زاویه M را قطع نماید لذا باید $CH \leqq a < l$ ویا $l \sin\frac{A}{2} \leqq a < l$

بازاء این شرط مسئله همواره دارای یک جواب است زیرا بسهولت میتوان اثبات نمود که مثلثات ABC و $A'B'C'$ متساویند

مسئله ۲ — از مثلثی زاویه A و منصف این زاویه بطول β و ارتفاع وارد از این راس بطول h معلوم است مثلث را حل و بحث کنید

اگر ABC مثلث مطلوب و AD منصف الزاویه A و AH ارتفاع باشد از مثلثات ADB و ACD روابط



$BD = \frac{\beta \sin\frac{A}{2}}{\sin B}$ ذیل حاصل است

و $CD = \frac{\beta \sin\frac{A}{2}}{\sin C}$ چون $BD + CD = a$ پس

$$a \sin B \sin C = \beta \sin\frac{A}{2} (\sin B + \sin C) \quad (1)$$

از طرف دیگر از مثلث قائم الزاویه AHC معلوم میشود که

$$b \sin C = h \quad (2)$$

این دو تساوی با روابط دستگاه I تشکیل دستگاه پنج معادله پنج مجهولی میدهد برای محاسبه مجهولات این دستگاه از تقسیم روابط (۱) و (۲) با ملاحظه دستگاه نتیجه میشود

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{\beta}{h} \sin\frac{A}{2} (\sin B + \sin C)$$

یا $2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} = \frac{2\beta}{h} \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B+C}{2} \cos\frac{B-C}{2}$ وچون $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$

پس $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{\beta}{h}$ (۳) حال اگر زاویه مثبت φ را قسمی تعیین کنیم که $\cos\frac{B-C}{2} = \cos\varphi$ باشد حاصل میشود $\frac{B-C}{2} = \varphi$ که با ملاحظه $\frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$ نتیجه میشود :

$$\begin{cases} B = 90 - \frac{A}{2} - \varphi \\ C = 90 - \frac{A}{2} + \varphi \end{cases}$$

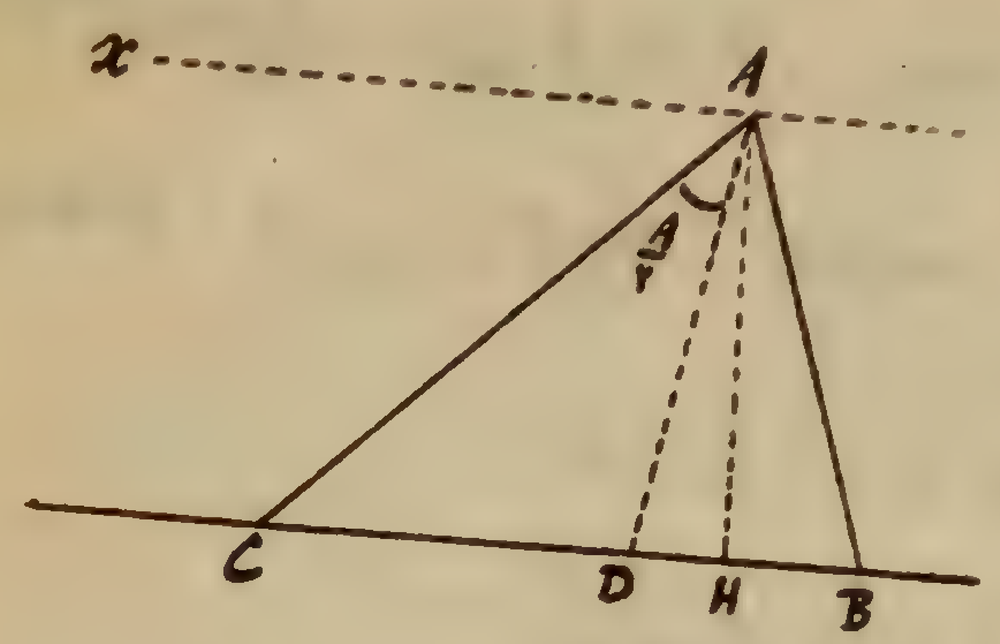
و از آنجا طول اضلاع چنین میشود $b = \frac{h}{\sin C}$ و $c = \frac{h}{\sin B}$

و $a = \frac{h \sin A}{\sin B} = \frac{h \sin A}{\sin B \sin C}$

بحث — برای اینکه مسئله ممکن باشد اولاً باید $\cos\frac{B-C}{2} \leq 1$ که از آن نتیجه میشود $\beta \leq h$ (۴) ثانیاً باید زوایای B و C محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه باشند زاویه B قابل قبول است برای اینکه زاویه C نیز قابل قبول باشد باید $90 - \frac{A}{2} > \varphi$ وچون طرفین نامساوی اخیر زوایای حاده اند لذا نتیجه میشود $\sin\frac{A}{2} < \cos\varphi$ و از آنجا $h > \beta \sin\frac{A}{2}$ (۵) از مقایسه نامساویهای (۴) و (۵) شرط امکان مسئله چنین میشود

حل و بحث هندسی — چون مثلث قائم الزاویه ADH را با معلومات وتر (β)

و یک ضلع b رسم کنیم و از طرفین ضلع b و از رأس A دو زاویه مساوی $\frac{A}{2}$



بسازیم محل تقاطع امتداد ضلع دیگر این زاویه با امتداد DH رئوس دیگر مثلث را مشخص میکند برای اینکه مسئله ممکن باشد باید اولاً $h \leq b$ ثانیاً ضلع دیگر زاویه $\frac{A}{2}$ امتداد DH را قطع کند یعنی $\frac{A}{2} < \widehat{xAD}$ باشد (خط AX موازی DH است) و یا $\frac{A}{2} < ADH$

یا $\sin\frac{A}{2} < \frac{h}{b}$ و از آنجا $b \geq h > b\sin\frac{A}{2}$

مسئله ۳ — در مثلثی ارتفاع h و قاعده a و تفاضل زوایای B و C معلوم است $B - C = \alpha$ (α محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه میباشد) مطلوبست حل و رسم مثلث

میدانیم که $h = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}$ و لذا :

$$h = \frac{a[\cos(B-C) - \cos(B+C)]}{2\sin A} = \frac{a[\cos\alpha - \cos(B+C)]}{2\sin(B+C)}$$

که پس از رفع مخرج حاصل میشود :

$$2h\sin(B+C) + a\cos(B+C) = a\cos\alpha$$

معادله کلاسیک اخیر برحسب $\tan\frac{B+C}{2}$ چنین میشود :

$$a\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{B+C}{2} - 2h\tan\frac{B+C}{2} - a\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0 \quad (1)$$

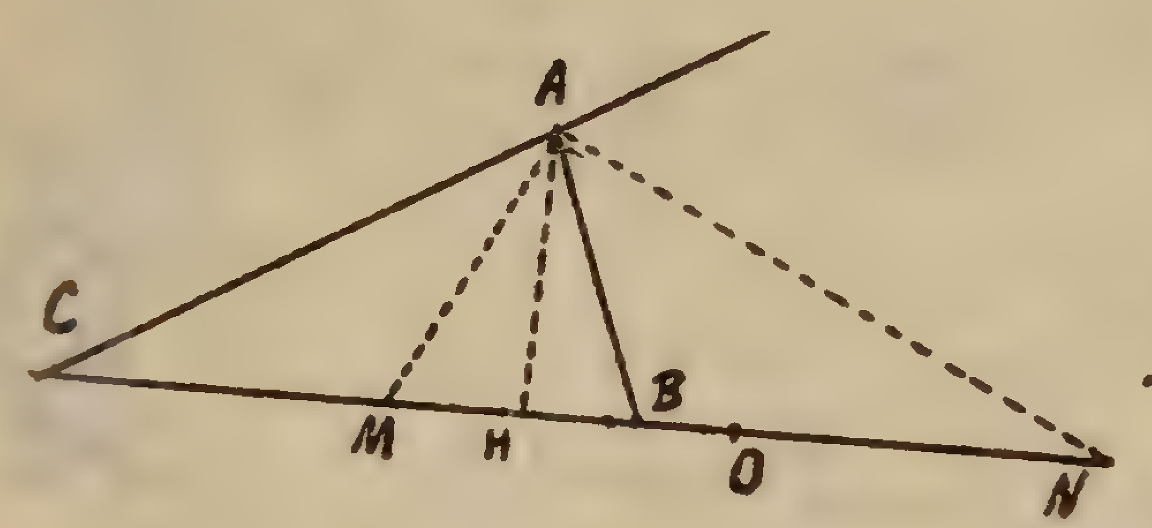
از حل این معادله $\tan\frac{B+C}{2}$ و در نتیجه $\frac{B+C}{2}$ معلوم میشود که با ملاحظه روابط $B - C = \alpha$ و $A + B + C = 180$ زوایای A و B و C بدست میآیند و از آنجا اضلاع مثلث از روابط $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$ و $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$ معلوم میشوند

بحث — برای اینکه مسئله دارای جواب قابل قبول باشد باید اولاً b و c مثبت و ثانیاً زوایا محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه باشند اضلاع b و c مثبت خواهند بود هرگاه زوایای A و B و C بین صفر و ۱۸۰ باشند و شرط اخیر وقتی موجود خواهد بود که $\frac{B-C}{2} < \frac{B+C}{2} < 90°$ یا $\tan\frac{\alpha}{2} < \tan\frac{B+C}{2}$ باشد بعبارة اخری شرط امکان مسئله آنست که ریشه‌های معادله بزرگتر از $\tan\frac{\alpha}{2}$ باشند

شرط آنکه مسئله فقط دارای یک جواب باشد آنست که $f(\tan\frac{\alpha}{2}) < 0$ و یا

۲۰ $\frac{A}{2}\operatorname{tg} 2h$- این نامساوی همواره محقق بوده ولذا مسئله همیشه دارای یک جواب است

حل هندسی — فرض میکنیم مسئله حل شده و مثلث ABC مثلث مطلوب باشد میدانیم که زاویه حادثه بین ارتفاع و منصف الزاویه هر راس برابر است با نصف تفاضل دو زاویه دیگر بنابراین



مثلث AHM را با معلومات زاویه A مساوی $\frac{\alpha}{2}$ و زاویهٔ قائمه H و ضلع h_a رسم میکنیم

حال برای یافتن رئوس B و C عمود AN را بر AM اخراج میکنیم واضح است که AN منصف الزاویه خارجی مثلث مطلوب بوده و بنابراین نقطه N مزدوج توافقی M نسبت به دو راس مطلوب B و C میباشد و چون فرض کنیم که O وسط MN باشد بنابر آنچه میدانیم $\overline{ON}^2 = \overline{OB}.\overline{OC}$ خواهد بود و با ملاحظه آنکه $a = \overline{OC} - \overline{OB}$ برای یافتن رئوس B و C کافی است که بر روی خط غیر محدود MN دو نقطه B و C را بطریقی پیدا کنیم که $\overline{ON}^2 = OB.OC$

و $a = OC - OB$ باشد بسهولت معلوم میشود که مسئله همواره دارای یک جواب است

تمرینات

۱۵۳- ثابت کنید که در مثلثات متساوی الساقین این روابط برقرار است

$\sin A = 2\sin B \sin\frac{A}{2}$ $\qquad$ $\sin A = 2\sin B\cos C$

$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} =$ [illegible]

۱۵۴- استقرار روابط $a = \dfrac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$ و $a = \dfrac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$ و $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$

را تعیین کنید (بدین طریق: بفرض $b > c$ چون بر ضلع AC از طرفین نقطه A قطعات AD و AE را مساوی c جدا کنیم معلوم میشود که $CE = b+c$ و $CD = b-c$ خواهد بود و چون بین اجزای مثلثات BCD و BCE رابطهٔ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ را برقرار نمائیم روابط فوق تعیین میشود)

۱۵۵- اگر $2p$ مساوی محیط و S مساحت و R شعاع دایره محیطیه و r و r_a و r_b و r_c اشعهٔ دوایر محاطیه مثلثی غیر مشخص باشند صحت روابط

ذیل را ثابت کنید:

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$$

$$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$$

$$a=p\left(1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$$

$$(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0$$

$$b\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{B}{2}=p-a$$

$$b\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+c\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=4R$$

$$a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$$

$$p=r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$4R=r_a+r_b+r_c-r$$

$$S=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$S=p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$S=\frac{abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{p}$$

۱۵۶- اگر در مثلثی $b-c=nc$ باشد صحت روابط ذیل را ثابت کنید

$$\cos\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\cos\frac{C}{2} \quad \text{و} \quad \cot\frac{B-A}{2}=\frac{1+n\cos B}{n\sin B}$$

۱۵۷- اگر α و β و γ بترتیب مساوی منصف الزوایای داخلی زوایای A و B و C و α' و β' و γ' منصف الزوایای خارجی این زوایا باشند ثابت کنید

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\alpha}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\beta}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\gamma}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\alpha'}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\beta'}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\gamma'} \quad (\text{بفرض } a>b>c)$$

۱۵۸- اگر اضلاع a و b و c (بفرض $a<b<c$) جمل متوالیه تصاعدی حسابی باشند ثابت کنید که اولاً $\cot\frac{A}{2}$ و $\cot\frac{B}{2}$ و $\cot\frac{C}{2}$ نیز جمل متوالیه تصاعد حسابی خواهند بود ثانیاً $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

$$ac=6Rr$$

۱۵۹- در مثلث ABC میانه AM مساوی ضلع AB است اولاً صحت روابط ذیل را ثابت کنید $\tan B=3\tan C$ و $\sin A=2\sin(B-C)$

ثانیاً اگر در این مثلث زاویه A معلوم باشد سایر زوایا را حساب کنید

۱۶۰- در مثلث متساوی الساقین ABC مطلوبست محاسبه طول OO' (O مرکز دایره محیطیه و O' مرکز دایره محاطیه داخلی مثلث است) برحسب ضلع a

۱۶۱- مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلث متساوی الساقین ABC $(AB=AC)$ با معلومات:

R و r' — R و r

a و B) h_B و (منصف الزاویهٔ داخلی B) — h و $a+b=l$

A و S — h و $2p$

مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی غیر مشخص بامعلومات

۱۶۲- زوایا و یک ارتفاع

۱۶۳- زوایا و یک میانه

۱۶۴- زوایا و مجموع $l = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

۱۶۵- a و A و h_a

۱۶۶- ارتفاعات — ۱۶۷- میانه‌ها

۱۶۸- A و a و r

۱۶۹- A و h_a و $2p$

۱۷۰- a و $b-c=d$ و $B-C=\alpha$

۱۷۱- h_a و $b-c=d$ و $B-C=\alpha$

۱۷۲- A و $2p$ و r

۱۷۳- a و A و α منصف این زاویه

۱۷۴- a و h_a و $b+c=l$

۱۷۵- a و S و نسبت $\frac{b}{c}=m$

۱۷۶- a و S و $b+c=l$

۱۷۷- A و R و $b+c=l$

۱۷۸- h_a و m_a (میانهٔ a) و $b+c=l$

۱۷۹- A و m_a و S

۱۸۰- A و a و $b^2+c^2=K^2$

۱۸۱- A و α (منصف الزاویهٔ وارد از رأس A) و m_a

۱۸۲- a و m_a و $C-B=\gamma$

۱۸۳- a و A و $b^2-c^2=K^2$

۱۸۴- h_a و m_b و m_c

۱۸۵- A و R و $b^2-c^2=K^2$

۱۸۶- در مثلث متساوی الساقین ABC قاعده a و منصف الزاویه یکی از زوایای مجاور بقاعده معلوم است مطلوبست اولاً محاسبه نصف زوایای مجاور بقاعده ثانیاً پس از بحث مسئله دستورات حاصله را قابل محاسبهٔ لگاریتمی نمائید

۱۸۷- اگر اشعهٔ دوایر محاطیهٔ خارجی مثلث ABC جزو جمل متوالیه تصاعدی حسابی باشند و a ضلع وسط باشد اولاً ثابت کنید که $2\,l\frac{A}{2} = l\frac{B}{2} + l\frac{C}{2}$ ثانیاً اگر زاویه A معلوم باشد سایر زوایا را حساب نموده بحث کنید

۱۸۸- در مثلث ABC ارتفاع وارده از رأس A مساوی مجموع ارتفاعات دیگر است اولاً ثابت کنید که $\frac{1}{h_A} = \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}$ ثانیاً بفرض معلوم بودن A و a مثلث را حل و بحث کنید

۱۸۹- در مثلث ABC شعاع دایره محیطی R و r و r' شعاع دوایر محاطیه داخلی و خارجی زاویه A معلوم است اولاً $\sin\frac{A}{2}$ و فاصله خط المرکزین r و r' را تعیین کنید ثانیاً بدین وسیله مثلث را رسم نمائید

۱۹۰- در مثلث ABC ارتفاع AH نصف ضلع BC میباشد اولاً رابطه بین ظل زوایای B و C تعیین کنید ثانیاً اگر زاویه A معلوم باشد زوایای B و C را حساب نموده بحث کنید ثالثاً مطلوبست محاسبه $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ و $\operatorname{tg}B$ و $\operatorname{tg}C$ در صورتیکه $B = 2C$ باشد

۱۹۱- مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلثی که از آن ضلع a و زاویه A و $m^2 = (b-c)^2 + h^2$ معلوم باشد (h ارتفاع وارد از رأس A است)

۱۹۲- اگر در مثلث ABC نقطه D موقع ارتفاع AD و نقطه H محل تقاطع سه ارتفاع و $m = \frac{AH}{AD}$ باشد (m عددی است مثبت یا منفی برحسب اینکه دو نقطه H و D در یکطرف A و یا در طرفین آن واقع شوند) اولاً صحت رابطه ذیل را ثابت کنید $\operatorname{tg}B \operatorname{tg}C = \frac{1}{1-m}$ ثانیاً بفرض معلوم بودن زاویه A سایر زوایا را معلوم نموده بازاء مقادیر m بحث کنید

۱۹۳- در مثلث ABC فصل زاویه B بر C یک قائمه است اگر R شعاع دایره محیطیه مثلث باشد اولاً صحت روابط ذیل را ثابت کنید $b = 2R\cos C$ و $a = 2R\cos 2C$ و $c = 2R\sin C$ و بوسیلهٔ این روابط صحت تساویهای ذیل را تحقیق کنید $b^2 + c^2 = 4R^2$ و $b^2 - c^2 = 2Ra$

ثانیاً اگر $2b = a + c$ اضلاع مثلث را برحسب R و ρ حساب کنید

۱۹۴- از مثلثی ارتفاع و میانه و نصف الزاویه وارده از یک رأس معلوم است اجزاء مثلث را حل و بحث کنید

۱۹۵- از مثلثی زاویه A و ضلع c و نسبت $k = \frac{a}{m}$ معلوم است (m میانه وارده از رأس A میباشد) اولاً مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلث ثانیاً اضلاع را بوسیله دستورات قابل محاسبهٔ لگاریتمی حساب کنید

۱۹۶- در مثلث ABC اگر $b \neq c$ و $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c}$ باشد اولاً صحت روابط ذیل را ثابت کنید $b^2 + c^2 = 2a^2$ و $S = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}A$ ثانیاً بفرض معلوم بودن a و $S = \frac{ma^2}{4}$ زوایای مثلث را حساب کنید

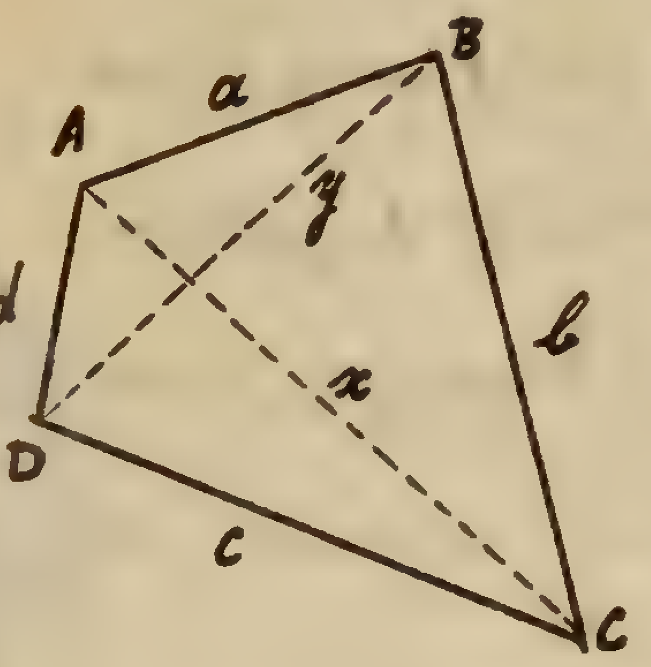
۱۹۷- در مثلث ABC نقطه O مرکز دایره محاطیه داخلی است اگر $\overline{OA}^2 = OB \cdot OC$ باشد اولاً صحت رابطهٔ ذیل را تحقیق کنید $\sin^2\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ثانیاً بفرض معلوم بودن زاویه A سایر زوایای مثلث را حساب نموده بحث کنید

۱۹۸- اگر در مثلث ABC میانه‌های اضلاع b و c برهم عمود باشند چه رابطه بین اضلاع برقرار است ثانیاً مطلوبست محاسبه اضلاع b و c در صورتیکه ضلع a و زاویه A معلوم بوده و میانه‌های اضلاع b و c برهم عمود باشند

فصل نهم - چهارضلعیهای محدب

۷۷ - در چهارضلعی محدب ABCD زوایا را به $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و $\hat{D}$ و اضلاع را به a و b و c و d مینمائیم همواره این رابطه بین زوایا برقرار است

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 360°$$ (هندسه)



هر چهارضلعی محدب دارای ۸ جزء (چهار زاویه و چهار ضلع) که باجزاء اصلیه موسوم میباشد و بطور کلی با پنج جزء از این هشت جزء مشروط براینکه دو جزء آن ضلع باشد میتوان چهارضلعی را رسم نموده اجزاء مجهوله را بوسیله ترسیم اندازه گرفت و نیز ممکن است اجزاء مجهوله بوسیله دستورهائیکه در مبحث حل و بحث اجزاء مثلث ذکر کردیم حساب نمود بدینطریق که اقطار ذوار بعة الاضلاع را رسم نموده شکل را بمثلثات تجزیه میکنیم چون این اقطار را به x و y نمایش دهیم حل و بحث اجزاء چهارضلعی بحل و بحث اجزاء مثلث منجر میشود چنانکه از مسئله ذیل معلوم میشود

مسئله - از چهارضلعی محدب ABCD اضلاع و زاویهٔ A معلوم است مطلوبست محاسبه سه زاویه دیگر

چون قطر BD = y را مجهول فرعی فرض کنیم اولاً میتوان اجزاء مثلث ABD را که دو ضلع a و d و زاویه بینهمای آن ($\hat{A}$) معلوم است حساب نمود (حالت دوم کلاسیک) در نتیجه قطر y و زوایای ABD و ADB معلوم میشود ثانیاً میتوان اجزاء مثلث BCD را بدست آورد زیرا سه ضلع آن معلوم است (حالت چهارم کلاسیک) بنابراین زاویه C و زوایای DBC و BDC معلوم میشود

لذا $\hat{B} = A\hat{B}D + D\hat{B}C$ و $\hat{D} = A\hat{D}B + B\hat{D}C$

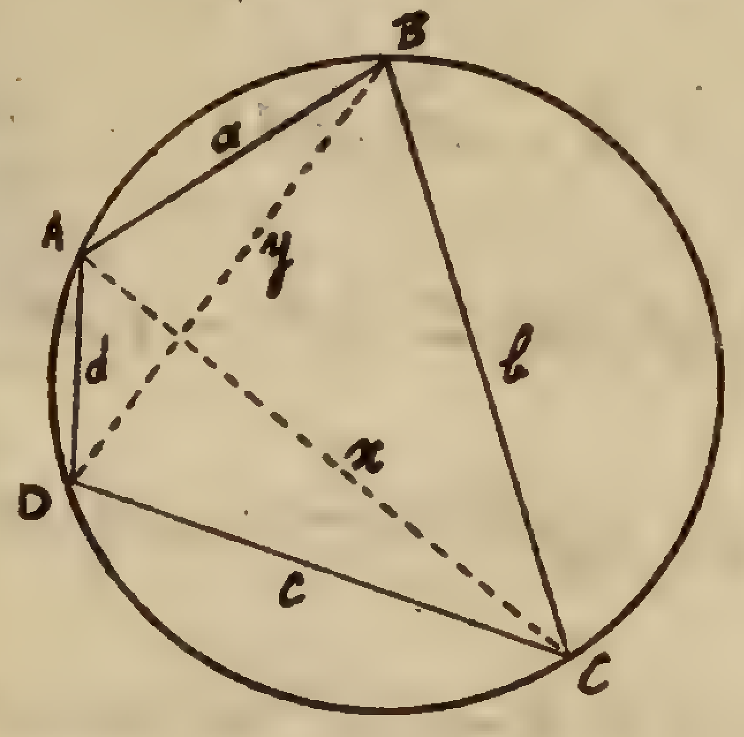
تبصره - ممکن است بجای یکی از اجزاء معلوم چهارضلعی رابطه بین اجزاء آن برقرار باشد و یا اینکه چهارضلعی دارای خاصیت مخصوصی باشد این شرائط بخصوصها معلومات مسئله تشکیل دستگاه کاملی میدهد که از حل آن مجهولات تعیین میشود مثلاً اگر چهارضلعی محیطی باشد این رابطه بین اضلاع آن برقرار است $a + c = b + d$ (هندسه) و یا اگر ذوار بعة الاضلاع محاطی باشد این رابطه بین زوایا حاصل میشود $A + C = B + D = 180$ (هندسه) و یا اگر در چهارضلعی ABCD اقطار برهم عمود باشد نتیجه میشود $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ (از قضیه فیثاغورث) در این قبیل چهارضلعی ها دانستن چهار جزء لازم برای حل و بحث اجزاء آن کافیست من باب مثال

مسئله ذیل را حل میکنیم

مسئله — در چهار ضلعی محاطی اضلاع معلوم است مطلوبست محاسبهٔ زوایا و مساحت و اقطار و شعاع دایره محیطیه آن

اولاً محاسبهٔ زوایا — چون چهار ضلعی محاطی است لذا: $A+C = B+D = 180^\circ$

برای محاسبه زاویه A و در نتیجه زاویه C قطر $BD = y$ را رسم میکنیم لذا روابط ذیل حاصل میشود



$$y^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A \quad (1)$$

و

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C \quad (2)$$

و چون زوایای A و C مکمل یکدیگرند لذا

$$\cos C = -\cos A$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه میشود

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

که از آن رابطهٔ ذیل بدست میآید

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}$$

این دستور قابل محاسبهٔ لگاریتمی نیست میتوان آنرا بطریقه ذیل قابل محاسبه نمود

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(bc+ad)}$$

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(bc+ad)}$$

و یا

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)}$$

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)}$$

و چون محیط چهار ضلعی را مساوی $2p$ فرض کنیم روابط فوق چنین میشوند

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}$$

از تقسیم این دو تساوی حاصل میشود

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

بوسیله این دستور که قابل محاسبهٔ لگاریتمی است زاویه A و از رابطهٔ $C = 180 - A$ زاویه C بدست میآید بهمین طریق زاویه B را نیز میتوان تعیین نمود

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)(p-d)}}$$

و لذا $D = 180 - B$

بحث — چون هر یک از زوایای چهار ضلعی محصور بین صفر و ۱۸۰ درجه است بنابراین نصف آنها بین صفر و ۹۰ درجه واقع بوده و ظل نصفشان میتوانند جمیع مقادیر

مثبت را دارا گردد بطوریکه شرط امکان مسئله آنست که مقادیر زیر را دیکالها مثبت باشند یعنی

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) > 0$$

یا

$$(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d) > 0$$

حال اگر یکی از اضلاع مثلاً a را ضلع اعظم فرض کنیم سه عامل آخر نامساوی فوق مثبت و بنابراین شرط امکان مسئله مثبت بودن عامل اول است یعنی

$b+c+d-a > 0$ که از آن نتیجه میشود $a < b+c+d$

یعنی برای اینکه مسئله ممکن باشد باید ضلع اعظم کوچکتر از مجموع اضلاع دیگر باشد.

ثانیاً مساحت — مساحت چهارضلعی فوق عبارتست از مجموع مساحات دو مثلث ABD و BDC یعنی:

$$S = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C = (ad+bc)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

که چون بجای $\sin\frac{A}{2}$ و $\cos\frac{A}{2}$ مقادیر شان را برحسب اضلاع قرار دهیم حاصل میشود

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ثالثاً محاسبهٔ اقطار — چون در رابطه (۱) بجای $\cos A$ مساویش $\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}$ را بگذاریم نتیجه میشود

$$y^2 = a^2+d^2-2ad\,\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

و از آنجا

$$y = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

و بهمین طریق معلوم میشود که

$$x = \sqrt{\frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

از ضرب این دو رابطه حاصل میشود $xy = ac+bd$ یعنی در چهارضلعی محاطی سطح دو قطر مساوی مجموع مسطحات اضلاع متقابل است (قضیهٔ بطلمیوس) اگر روابط x و y را برهم تقسیم کنیم نتیجه میشود $\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$

یعنی در هر چهارضلعی محاطی نسبت دو قطر بیکدیگر مثل نسبت مجموع حاصلضربهای اضلاعی است که بطرفین قطر منتهی شده اند

رابعاً شعاع دایرهٔ محیطیه — اگر R را شعاع دایرهٔ محیطیه چهارضلعی فرض کنیم چون این دایره بر مثلث ABD نیز محیطیه است لذا $2R = \frac{y}{\sin A}$ و یا $2R = \frac{y}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$ و چون بجای y و $\sin\frac{A}{2}$ و $\cos\frac{A}{2}$ مقادیر شانرا

برحسب اضلاع قرار دهیم بسهولت معلوم میشود :

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

تمرینات

۱۹۹- مطلوبست حل و بحث اجزاء چهارضلعی محاطی ABCD بامعلومات

۱- a و d و A و $B=90°$

۲- a و b و c و $B=90°$

۳- زوایا و محیط و بعلاوه این چهارضلعی نیز محیطی است

۴- محیط و حاصلضرب اقطار و بعلاوه میدانیم که این چهارضلعی محیط بر دایره بشعاع r است

۵- سه ضلع و زاویه که اقطار با یکدیگر تشکیل داده‌اند

۶- دو ضلع متقابل و دو قطر

۲۰۰- مطلوبست حل و بحث اجزاء ذوزنقه بامعلومات :

۱- یک زاویه و مساحت و بعلاوه میدانیم که در دایره بشعاع R محاط است

۲- زوایا و اقطار

۳- اقطار و مساحت و قاعده

۲۰۱- مطلوبست حل و بحث اجزاء چهارضلعی غیرمشخص بامعلومات

۱- سه ضلع و دو زاویه طرفین ضلع چهارم

۲- اضلاع و مساحت

۳- زوایا و اقطار

۲۰۲- اگر α زاویه بین مماسهای مشترک دو دایره باشد صحت تساوی ذیل را ثابت کنید

$(R+R')^2 \sin\alpha = 4(R-R')\sqrt{RR'}$ (R' و R اشعه این دو دایره‌اند)

۲۰۳- مطلوبست محاسبه زوایای چهارضلعی محیطی ABCD که از آن سه ضلع a و b و c و شعاع دایره محاطی (r) معلوم است در حل این مسئله دو حالت تمیز دهید برحسب آنکه نقاط تماس دایره محاطی در داخل اضلاع و یا در امتداد آنها باشد

۲۰۴- در ذوزنقه متساوی الساقین BCDE که قاعده طول آن BC است محیط بطول $2p$ و قطر BD بطول d و زاویه که این قطر با قاعده BC تشکیل میدهد مساوی α است اولاً سطح ذوزنقه و اضلاع را حساب کنید ثانیاً چه رابطه بین معلومات برقرار شود تا ذوزنقه بتواند محیط بر دایره شود

۲۰۵- در چهارضلعی محدب ABCD اضلاع $AB=a$ و $BC=b$ و $AD=d$ و زوایای A و B معلوم است اولاً ضلع سوم c را حساب کنید ثانیاً چه شرایطی بین اضلاع برقرار شود تا جمیع مستطیلهای محیط بر این چهارضلعی با یکدیگر متشابه شوند

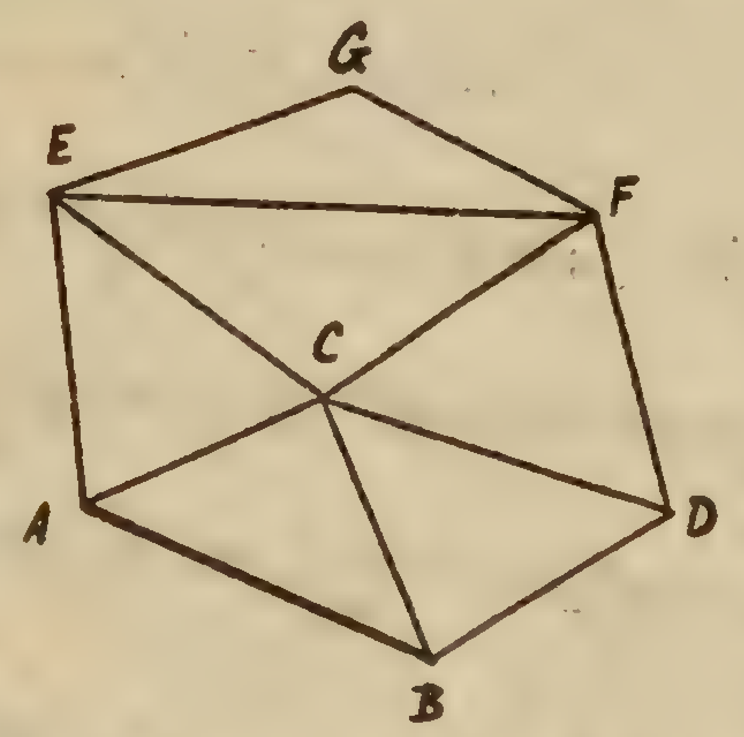
فصل دهم - موارد استعمال مثلثات در نقشه برداری

۷۸- در مساحی و نقشه برداری طول خطوط و مساحت اراضی و اعمال دیگر را بوسیله

آلاتی مانند زنجیر مساحی و برق و زاویه یاب وغیره میتوان تعیین نمود ولی برای آنکه محاسبات دقیقتر باشد غالباً یکی از خطوط را با نهایت دقت اندازه گرفته سایر خطوط شکل را بوسیله دستورات راجع بحل اجزاء مثلث حساب میکند

نقشه برداری — برداشتن نقشه قطعه زمینی عبارت از رسم شکلی متشابه با آن بر صفحه کاغذ است نسبت تشابه را مقیاس نامند واضح است که قطعات زمین همیشه افقی نیستند ولی در ترسیمات عموماً تصاویر آنها را بر سطح افق بصورت نقشه در میآورند

قاعده کلی برای برداشتن نقشه قطعه زمینی چنین است در روی زمین مزبور نقاط مشخصه ثابتی A و B و .... را قسمی فرض مینمائیم که از هر یک از این نقاط لااقل بتوان دو نقطه دیگر را رؤیت نمود حال چون این نقاط را بخطوطی خیالی بیکدیگر وصل کنیم تصویر شکل بر سطح افق بتجزیه بمثلثاتی میشود که بسهولت میتوان اجزاء این مثلثات را اندازه گرفت بطریقی

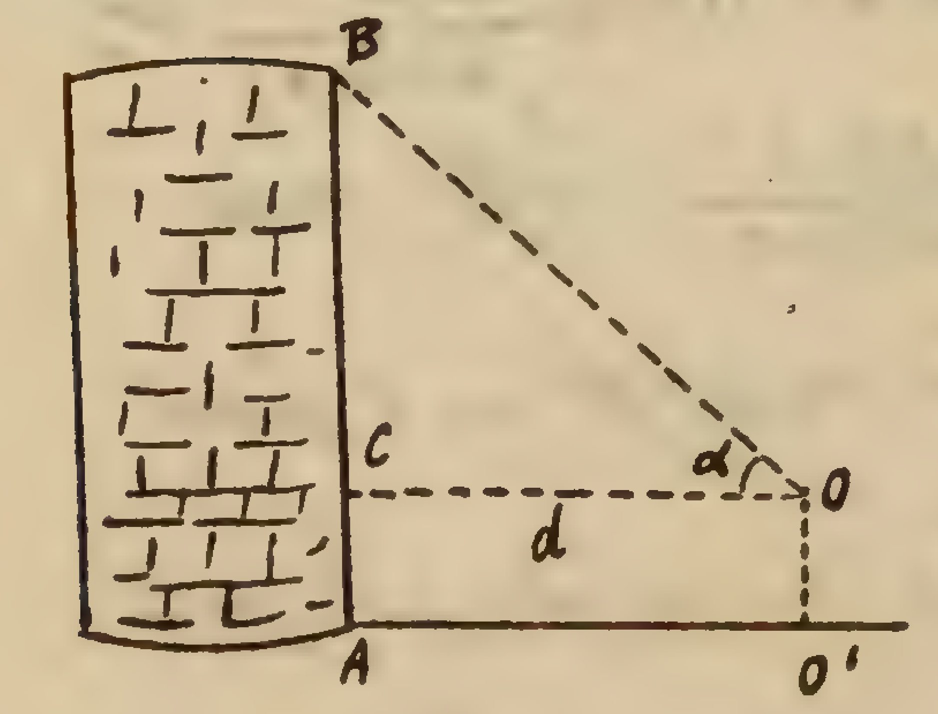


که در شکل مزبور ضلعی مانند AB را قسمی انتخاب میکنیم که ممکن الوصول و نسبةً مسطح باشد در اینصورت این قطعه خط را با دقتی کامل اندازه میگیریم برای تمام خطوط شکل فقط اندازه گرفتن همین یک ضلع

کافی است زیرا اگر در مثلث ABC زوایای A و B را اندازه بگیریم بنا بر دستورات حالت اول کلاسیک دو ضلع BC و AC تعیین میشود و لذا بوسیله اندازه گرفتن دو زاویه B و C از مثلث BCD را میتوان سایر اجزاء این مثلث را حساب نمود بهمین طریق مثلثات CBF و CEF وغیره را میتوان حل نمود این عمل را مثلث بندی Triangulation نامند

در نقشه برداری علاوه بر برداشتن نقشه زمین عموماً مسائلی از قبیل تعیین ارتفاع یک نقطه از سطح زمین و یا تعیین فاصله دو نقطه غیر ممکن الوصول وغیره مورد استعمال پیدا میکند که ذیلاً حل میکنیم

مسئله ۱ — مطلوبست تعیین ارتفاع برجی که موقع ارتفاع ممکن الوصول باشد.

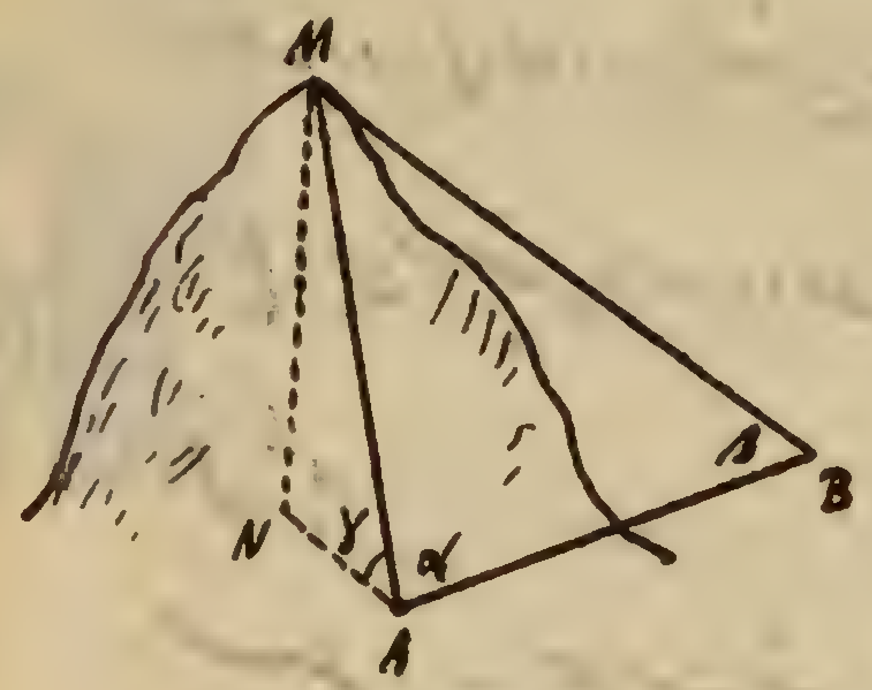


برای تعیین ارتفاع AB زاویه یاب را بر نقطه O گذارده زاویه $\widehat{COB} = \alpha$ را اندازه میگیریم و همچنین فاصله $OC = d$ که موازی سطح افق است با زنجیر مساحی حساب میکنیم لذا در مثلث قائم الزاویه

BOC این تساوی حاصل است $BC = OC \operatorname{tg} a$ ویا $BC = d \operatorname{tg} a$
وچون برای مقدار ارتفاع زاویه یاب یعنی OO را بیفزائیم ارتفاع برج بدست میآید

مسئله ۲ – مطلوبست تعیین ارتفاع کوه یا برجی که موقع ارتفاع غیر ممکن الوصول باشد

فرض میکنیم مقصود اندازه ارتفاع MN باشد در سطح افق دو نقطه A و B را فرض نموده



فاصله $AB = a$ و زوایای

$MAB = \alpha$ و $ABM = \beta$

و $MAN = \gamma$ را اندازه میگیریم

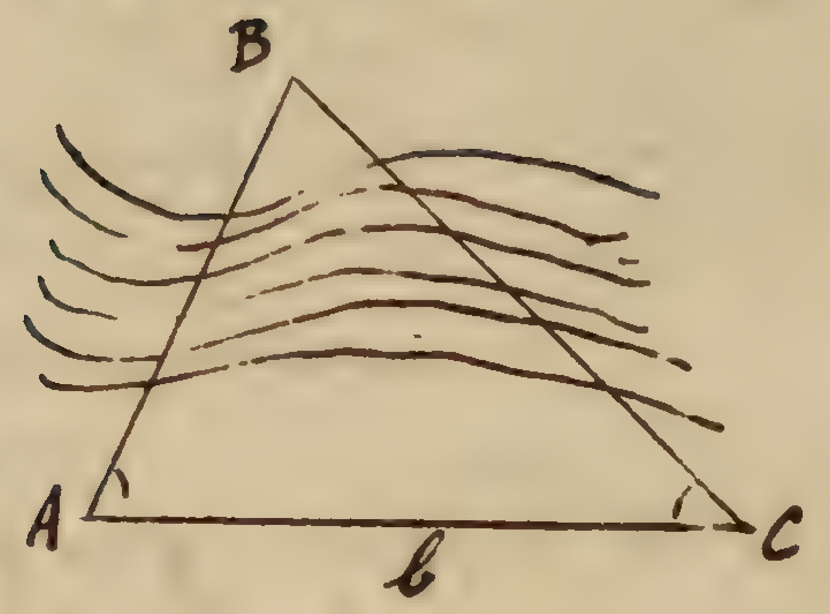
درینصورت از مثلث ABM نتیجه

میشود $MA = a \dfrac{\sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ (حالت اول کلاسیک) و از مثلث قائم الزاویه

MNA حاصل میشود $MN = MA \sin \gamma = a \dfrac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$

مسئله ۳ – مطلوبست فاصله نقطه A از نقطه غیر ممکن الوصول B

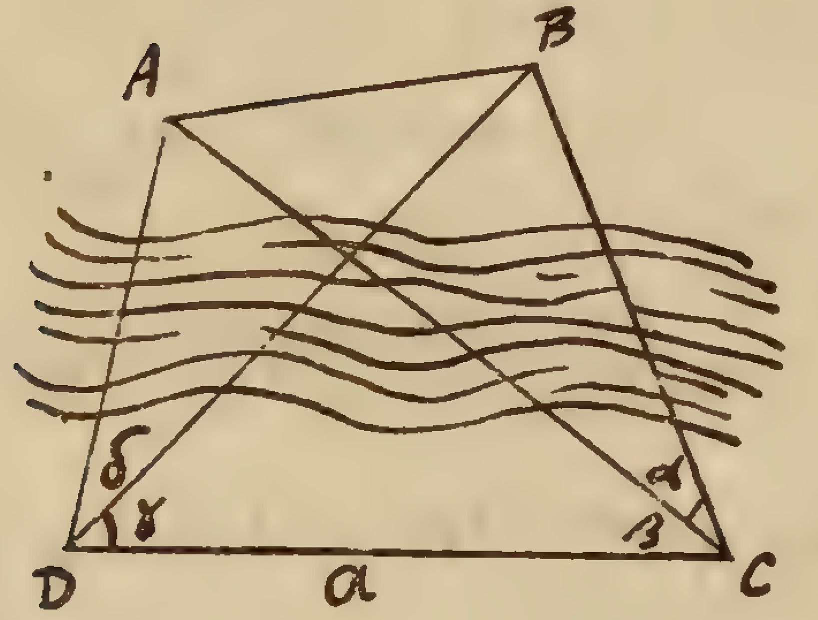
مثلاً فرض میکنیم فاصله AB را جریان آبی قطع نموده باشد برای تعیین فاصله AB
نقطه ممکن الوصول دیگر C را اختیار نموده فاصله $AC = b$ و زوایای C و A



را اندازه میگیریم لذا فاصله AB از این
رابطه بدست میآید $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin(A+C)}$
ولذا $AB = \dfrac{b \sin C}{\sin(A+C)}$

مسئله ۴ – مطلوبست تعیین فاصله
دو نقطه غیر ممکن الوصول

مثلاً فرض میکنیم بین ناظر و نقاط A و B جریان آب موجود باشد دو نقطه
ممکن الوصول C و D را انتخاب نموده



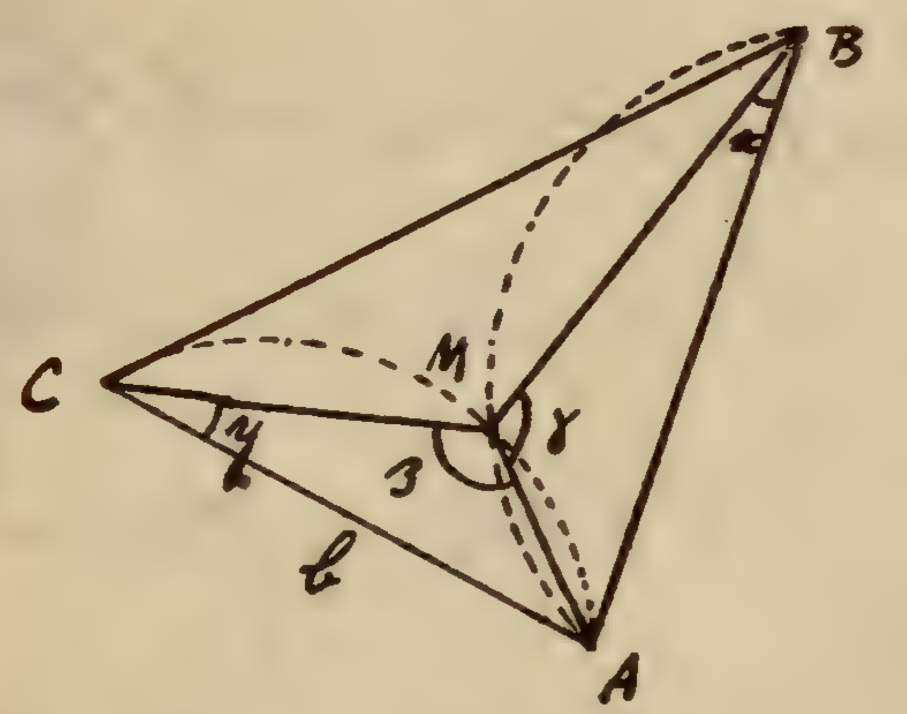
طول $CD = a$ و زوایای $ACB = \alpha$ و
$ACD = \beta$ و $BDC = \gamma$
و $ADB = \delta$ را اندازه میگیریم درینصورت
از حل مثلثات ACB و ADC ضلع BC و AC تعیین میشود :

$$BC = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} \quad , \quad AC = \frac{a \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}$$

ولذا در مثلث ABC دو ضلع AC و BC و زاویه بینهای α معلوم است میتوان
ضلع سوم BC را حساب نمود (حالت دوم کلاسیک)

مسئله ۵ ـ مسئلهٔ نقشه ـــ موضع نقاط A و B و C درنقشه معلوم است مطلوبست تعیین موضع نقطه مانند M برروی نقشه بقسمی که ازاین نقطه طولهای AC و BC بزوایای γ و β رؤیت شوند

حل هندسی ـ چون براوتار AB و AC بترتیب قوسهای حاوی زوایای γ و β رسم کنیم محل تقاطع این دو قوس جواب مسئله و یا نقطه M خواهد بود



حل مثلثاتی ـ طریقهٔ هندسی فوق چندان دقیق نیست لذا اگر بتوان فواصل MA و MB و MC را تعیین نمود موضع نقطه M مشخص میشود

چون اجزاء مثلث ABC معلوم است لذا کافی است که زوایای $x = \widehat{MBA}$ و $y = \widehat{MCA}$ تعیین شود دراینصورت ازحل مثلثات MAB و MCA (حالت اول کلاسیک) فواصل مزبوره معلوم میشوند

برای تعیین زوایای x و y میتوان چنین نوشت $x+y+\beta+\gamma+A = 360$ ونیز ازمثلثات MAB و MAC روابط ذیل نتیجه میشود $\frac{\sin x}{AM} = \frac{\sin\gamma}{c}$ و

$\frac{\sin y}{AM} = \frac{\sin\beta}{b}$ ازتقسیم این دو تساوی حاصل میشود

$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b\sin\gamma}{c\sin\beta}$ (۲) معادلات (۱) و (۲) تشکیل دستگاه دو معادله دو مجهولی میدهند که ازحل آن میتوان زوایای x و y را تعیین نمود و چنانکه میدانیم حل این دستگاه منجر بحل معادله ذیل میشود :

$$\mathrm{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{c\sin\beta - b\sin\gamma}{c\sin\beta + b\sin\gamma}\,\mathrm{cotg}\frac{\beta+\gamma+A}{2}$$

ازاین معادله $\frac{x-y}{2}$ وازرابطهٔ $\frac{x+y}{2} = 180 - \frac{\beta+\gamma+A}{2}$ (۴) قوس $\frac{x+y}{2}$ بدست میاید ولذا بسهولت x و y تعیین میشود

شرط امکان مسئله آنستکه $\beta+\gamma+A < 360$ باشد

تبصره ـــ اگر $\beta+\gamma+A = 180$ باشد دراینصورت $\mathrm{tg}\frac{x-y}{2}$ مبهم ولذا نقطه M غیرمشخص میشود زیرا دراینصورت تساوی (۱) چنین میشود

$x+y = 180$ (۵) یعنی x و y مکمل ولذا $\sin x = \sin y$

وازآنجا تساوی (۲) چنین میشود $b\sin\gamma = c\sin\beta$ پس رابطهٔ (۳) بصورت مبهم $\infty \times 0$ درمیاید برای تعیین نقطه M ازرابطهٔ (۵) معلوم میشود که چهارضلعی BMCA محاطی بوده ونقطه M برمحیط دایرهٔ محیطیهٔ مثلث ABC واقع است

پس معلوم میشود که در اینحالت بخصوص نقطه H خارج مثلث ABC واقع میباشد ولی اینحال هیچوقت در عمل اتفاق نیافتد

تمرینات

۲۰۶ - ناظری از پای برجی بفاصله ۶۰ متر واقع است در تحت چه زاویه این برج را رؤیت میکند درصورتیکه ارتفاع برج ۳۵ متر بوده فاصله چشم ناظر از سطح افق ۲۵ را متر باشد

۲۰۷ - برای اندازه گرفتن فاصله نقطه A از نقطه غیر ممکن الوصول C خط AB عمود بر AC و زاویه رؤیت ABC اندازه گرفته شده است $AC = 75{,}32$ متر

$ABC = 35^{\circ}\,17'\,12''$ مطلوبست تعیین فاصله

۲۰۸ - ناظری از یک ساحل رودخانه درختی را که در ساحل دیگر واقع است و فاصله اش از ناظر مساوی عرض رودخانه میباشد بزاویه ۶۰ درجه رؤیت میکند اگر ۴۰ متر از ساحل دور شود این زاویه رؤیت ۳۰ درجه میشود مطلوبست محاسبه طول درخت و عرض رودخانه

۲۰۹ - ناظری بفاصله ۶۰ متر از پای ستونی که بر انتهای آن مجسمه قرار داده اند واقع است ارتفاع ستون و مجسمه بر روی هم ۳۰ متر باشد مطلوبست تعیین ارتفاع مجسمه درصورتیکه برای این ناظر زاویه رؤیت مجسمه نصف زاویه رؤیت ستون باشد

۲۱۰ - بر بالای برج قائمی برقی قائماً نصب است ناظری بفاصله a از پای برج واقع شده برج و بیرق را بزوایای α و β رؤیت میکند مطلوبست تعیین ارتفاع برج و بیرق

۲۰۷ - زاویه رؤیت برجی ۴ درجه است چون ناظر یک کیلو متر ببرج نزدیک شود این زاویه رؤیت ۵ درجه میشود مطلوبست محاسبه ارتفاع برج و فاصله ناظر از پای برج

۲۰۸ - از سه نقطه A و B و C واقع بر سطح افق بالن S دیده میشود اگر زوایای قائمه بین شعاع بصر هر یک از این نقاط با سطح افق تشکیل میشود بترتیب α و β و γ باشد مطلوبست ارتفاع بالن از سطح افقی که براین سه نقطه گذشته در حالت خاص $\alpha = \beta = \gamma = 45^{\circ}$ ارتفاع بالن را تعیین کنید

۲۰۹ - از نقطه C انتهای برجی دو نقطه A و B واقع در سطح افق بزاویه $ACB = \alpha$ دیده میشود مطلوبست اولاً تعیین زاویه که تصویر قائم زاویه α بر سطح افق باشد درصورتیکه ارتفاع برج زوایای β و γ بترتیب حادث بین اشعه بصر CA و CB با قائم نقطه C معلوم است ثانیاً دستورات حاصله را قابل محاسبه نمائید

۲۱۰ - بر انتهای برجی بارتفاع a بیرقی بطول b قائماً نصب شده است مطلوبست تعیین موضع ناظری واقع در سطح افقی که از پای برج میگذرد تا اولاً بیرق را بزاویه معلوم α رؤیت کند و ثانیاً در تحت بزرگترین زاویه ممکنه بیرق را ببیند

۲۱۱ - ناظری از قله کوهی نقطه C را که بر دایره افق او واقع است در تحت زاویه α حادث بین شعاع بصر و قائم نقطه C رؤیت میکند مطلوبست تعیین ارتفاع کوه درصورتیکه شعاع زمین معلوم باشد

مسائل مختلفه

۲۱۲ - مربع $ABCD$ بضلع a مفروض است بر رأس A مستقیم AH که در داخل

ربع مرور نموده رسم شده است چون ربع حول این خط دوران کند اولاً ثابت کنید که سطح حاصل از دوران محیط ربع و حجم حاصل از دوران سطح ربع بترتیب مساوی حاصلضرب محیط و سطح ربع در محیط دایره بمرکز O و شعاع OO' است (نقطه O' مرکز ربع و نقطه O'' تصویر آن بر خط OH است) ثانیاً زاویه $BAH = x$ را طوری تعیین کنید که سطح شکل حاصل از دوران محیط ربع معادل سطح جانبی استوانه بشعاع قاعده a و ارتفاع h شود ثالثاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث کنید

۲۱۳- مثلث متساوی الاضلاع ABC بضلع a مفروض است از نقطه غیر مشخص M واقع بر ضلع AC بین دو نقطه A و C عمود PMQ را بر ضلع BC فرود میآوریم نقطه Q موقع عمود و نقطه P محل تقاطع آن با امتداد AB است اولاً طول $AM = x$ را طوری تعیین کنید که $MB = K.MP$ شود ثانیاً شرط امکان مسئله چیست ثالثاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث کنید

۲۱۴- بر ربع دایره AOB بشعاع R دو مماس BC و AC رسم شده نقطه غیر مشخص M بر قوس AB واقع است بفرض زاویه $MCB = \alpha$ و $MOB = \varphi$ اولاً صحت رابطه $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) = \sqrt{2}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ را تحقیق کنید ثانیاً بفرض معلوم بودن α زاویه φ را تعیین نمائید ثالثاً بازاء دو مقدار $\alpha = \frac{\pi}{12}$ و $\alpha = \frac{\pi}{6}$ زاویه φ را حساب کنید

۲۱۵- قطاع AOB بشعاع R و زاویه مرکزی α بین صفر و π مفروض است از نقطه غیر مشخص M واقع بر قوس قطاع دو عمود MP و MQ را بر دو شعاع OA و OB

فرود میآوریم اولاً زاویه $MOA = x$ را طوری تعیین کنید که مجموع دو عمود MP و MQ مساوی طول معین a شود ثانیاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث کنید ثالثاً بازاء $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ و $a = \frac{3R}{2}$ زاویه x را حساب کنید

۲۱۶- نیم دایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است بر امتداد قطر نقطه C بفاصله $AC = d$ و بر محیط نیم دایره نقطه غیر مشخص M واقع است اگر زاویه MAB را مساوی x فرض کنیم اولاً زاویه x را طوری تعیین کنید که MC واسطه هندسی بین قطعات MA و MB شود ثانیاً مسئله را بحث نموده بازاء و اگر نیم d زاویه x را حساب کنید ثالثاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث نمائید

۲۱۷- نقطه A در داخل زاویه قائمه xOy بفاصله $OA = a$ واقع است از این نقطه عمود CAB بر خط OA اخراج شده و نقاط B و C بترتیب محل تقاطع آن با ضلعین Ox و Oy میباشد بفرض زاویه $xOA = \varphi$ اولاً زاویه φ را قسمی تعیین کنید که محیط مثلث BOC مساوی ma شود ثانیاً بازاء چه مقادیری از m مسئله دارای جواب است ثالثاً بوجه هندسی مسئله را حل و بحث کنید

۲۱۸- کنج سه وجهی قائمه Oxyz مفروض است بمرکز O رأس کنج دایره بشعاع معلوم R واقع در وجه xOy رسم شده و از نقطه I واقع بر یال Ox بفاصله $OI = d$ خط IA در وجه xOz قسمی مرور نموده که با یال Ox زاویه α را تشکیل داده مطلوبست تعیین نقطه M واقع بر محیط دایره O بقسمی که فاصله اش از خط IA ماکزیمم شود

۲۱۹- در مثلث قائم الزاویه ABC وتر را بحرف a و ضلعین زاویه قائمه را بحروف

b و c ارتفاع وارد بر وتر را بحرف h مینامیم اولاً بفرض معلوم بودن a مطلوبست محاسبه b و c درصورتیکه $b + c = 2mh + a$ (m نمایش عددی است مثبت) ثانیاً حل این مسئله منجر بحل معادلهٔ $bx + cx = \frac{1}{m} - 1$ میشود اگر a و h و m دردست باشند مطلوبست محاسبهٔ b و c و h بوسیله دستورهای قابل محاسبهٔ لگاریتمی

۲۲۰- در مثلث قائم الزاویه ABC (قائمه در رأس A) ارتفاع وارد بر وتر بطول $AH = h$ و میانهٔ ضلع AC بطول $BM = m$ معلوم است اولاً طول قطعاتی از وتر را که ارتفاع h تقسیم نموده تعیین کنید ثانیاً بازاء چه مقادیر $\frac{m}{h}$ مسئله دارای جواب است ثالثاً اگر $\frac{m}{h} = \sqrt{\frac{14}{4}}$ باشد بدون رجوع بجداول لگاریتمی اجزاء مثلث را حساب کنید

۲۲۱- در مثلث غیر مشخص ABC اشعهٔ دوایر محاطیه داخلی و محاطیه خارجی زاویه A را به r و r' و ارتفاع وارد بر ضلع a را به h مینامیم اولاً صحت روابط ذیل را تحقیق کنید

$$\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{a}{r} \quad , \quad \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{a}{r'}$$

$$\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{r'}{r} \quad , \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{2}{h}$$

ثانیاً اگر زاویه A قائمه بوده و r و r' معلوم باشند مطلوبست محاسبهٔ زوایای B و C و بحث بازاء مقادیر نسبتهٔ $\frac{r}{r'}$ و همچنین محاسبه اضلاع مثلث برحسب مقادیر r و r' دستورات حاصله را قابل محاسبهٔ لگاریتمی نمائید و بازاء ماکزیمم نسبت $\frac{r}{r'}$

اضلاع این مثلث را برحسب r' حساب کنید ثالثاً با معلومات r و r' بوجه هندسی مثلث قائم الزاویه ABC را رسم نموده بحث کنید

۲۲۲- در مثلث ABC نقاط B_1 و C_1 بترتیب محل تقاطع منصف الزوایای B و C با اضلاع AC و AB میباشد و همچنین نقاط B_2 و C_2 محل تقاطع منصف الزوایای خارجی B و C با همین اضلاع است مطلوبست محاسبه زوایای B و C درصورتیکه اولاً ضلع a و زاویه A و حاصلضرب $BB_1 \times CC_1 = ma^2$ معلوم باشد (m عددی است مثبت) ثانیاً a و A و $BB_2 \times CC_2 = ma^2$

۲۲۳- در مثلث متساوی الاضلاع ABC نقطه O مرکز دایره محیطیه آن و $3a$ طول ارتفاع این مثلث است از نقطه M بفاصله $OM = r$ و زاویه $\widehat{AOM} = \omega$ عمودهای MP و MQ و MR را بر اضلاع فرود آورده ایم اولاً طول این عمودها را برحسب a و r و ω تعیین نموده ثابت کنید که اگر نقطه M در داخل مثلث باشد مجموع این عمودها مقداری است ثابت ثانیاً مساحت مثلث PQR را تعیین نموده معلوم کنید بازاء چه مقدار r این سطح مساوی صفر میشود ثالثاً اضلاع مثلث PQR را حساب نموده و بدین وسیله شعاع دایره محیطیه آنرا حساب کنید

۲۲۴- مخروطی که مولدش SA با محورش SZ زاویه α تشکیل داده و بعضی C که نیم اقطارش a و b است مفروض شده اند که میتوان صفحه قاطعی فرض نمود که مقطعش با مخروط SZ بیضی مفروض شود اولاً اگر AB فصل مشترک این صفحه قاطع با یکی از مقاطع محوری که بر این صفحه عمود است باشد ثابت کنید که $SA \times SB = \frac{h^2}{\sin^2 A}$ ثانیاً مطلوبست

محاسبه زاویه SAB و طول SA و بالاخره سطح مثلث SAB برحسب a و h و α

۲۲۵- در مثلث ABC ضلع a معلوم است و نقطه D که محل تقاطع منصف الزاویه داخلی A با ضلع a است بین نقطه O وسط ضلع a و راس C بفاصله $OD = d$ قرار گرفته است اولاً درصورتیکه زاویه B معلوم باشد ضلع $c = BA$ را حساب نموده بحث کنید در بحث این مسئله معلوم میشود که وقتی مسئله دارای جواب است که زاویه B کوچکتر از زاویه α باشد بازاء $d = \frac{a}{4}$ زاویه α را حساب کنید ثانیاً اگر ضلع c معلوم باشد زاویه B را تعیین نموده بحث کنید

۲۲۶- در مثلث ABC ضلع a و زاویه A معلوم است بر ضلع a بین راس B و C نقطه I بفاصله $BI = d$ واقع است اولاً اگر نقطه I محل تماس دایره محاطیه داخلی باشد شعاع دایره را حساب کنید ثانیاً اگر نقطه I موقع تماس دایره محاطیه خارجی زاویه A باشد شعاع این دایره را تعیین نمائید

۲۲۷- نقطه A بفاصله a از نقطه O مرکز دایره بشعاع R واقع است و نقطه M بر محیط این دایره قسمی قرار داده که زاویه $MOA = \alpha$ است چون قاطع AM را رسم کنیم محیط دایره را در نقطه دیگری مانند M' قطع میکند اولاً شعاع دایره محیطیه مثلث OMM' را برحسب α و a و R حساب کنید و معلوم نمائید بازاء چه مقداری از α این شعاع بطول [illegible] است ماکزیمم شعاع را حساب کنید ثانیاً اگر این دایره OA را در نقطه A' قطع کند ثابت کنید که چون α تغییر کند این نقطه ثابت میماند ثالثاً مطلوبست محاسبه AM و A'M و $\frac{AM}{A'M}$

رابعاً ثابت کنید که حاصلضرب $A'M \times AM'$ بستگی بمقدار α ندارد

۲۲۸- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) محیط را به $2p$ و شعاع دایره محیطی را به R و شعاع دایره محاطیه داخلی را به r مینامیم اولاً p را برحسب R و زاویه A تعیین نموده تغییرات p را وقتیکه R ثابت و a متغیر باشد تعیین کنید ثانیاً ثابت کنید که $r = 2R \sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)$ ثالثاً مطلوبست محاسبه زاویه A درصورتیکه $r = mR$ باشد (m عددی است مثبت)

۲۲۹- دایره بشعاع R بر ضلعین زاویه منفرجه $xOy = \alpha$ مماس است بر نقطه O عمود Oz بر صفحه این زاویه رسم شده و نقطه A بر این عمود بفاصله $OA = a$ قرار دارد بر ضلعین زاویه α دو نقطه M و N را قسمی تعیین کنید که زاویه MAN قائمه بوده و ضلع MN بر دایره R مماس شود

۲۳۰- دو خط Δ و Δ' بفاصله $2a$ موازی یکدیگرند بر نقطه O واقع بر صفحه این دو خط و بیک فاصله از آنها عمودی بر صفحه این دو خط اخراج شده و نقطه S بفاصله $OS = h$ بر این عمود واقع است مطلوبست تعیین دو نقطه A و B بترتیب واقع بر دو خط مفروض بقسمی که زاویه ASB قائمه بوده و زاویه مسطحه دو صفحه ASB و صفحه دو خط Δ و Δ' مساوی φ گردد

۲۳۱- در مثلث ABC تفاضل زوایای $B - C$ یک قائمه است اولاً مطلوبست محاسبه زوایای این مثلث درصورتیکه $\frac{b+c}{a} = m$ (حالت خاص $m = \sqrt{2}$) ثانیاً ثابت کنید که ارتفاع وارده از راس A مماس بر دایره محیطیه مثلث است و محل تقاطع

ارتفاعات قرینه رأس A نسبت بمحور تقارن BC میباشد ثالثاً در این مثلث صحت رابطه ذیل را ثابت کنید $b^2 - c^2 = 2aR$ (R شعاع دایره محیطه مثلث است) رابعاً اگر در این مثلث قاعده BC ثابت باشد مکان هندسی رأس A و محل تقاطع ارتفاعات مثلث را معلوم کنید (مکان هندسی رأس A شاخه‌ایست از هذلولی $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$ که از رأس B میگذرد)

۲۳۲- زاویه $BAC = \varphi$ و فاصله نقطه O واقع بر ضلع AB از ضلع AC مساوی $OH = h$ است اولاً بر ضلع AC نقطه M را قسمی تعیین کنید که چون از آن عمود MP را بر ضلع دیگر زاویه فرود آوریم این رابطه برقرار شود $\frac{\overline{MO}^2}{\overline{MP}^2} = 2K$ (K طولی است معلوم) ثانیاً در بحث این قسمت معلوم میشود که بازاء مقادیری از φ که کمتر از زاویه معین که باید تعیین نمود مسئله دارای دو جواب M' و M'' است اگر $h = 1$ و $K = 2$ باشد زاویه φ را قسمی تعیین کنید که حجم حاصل از دوران ذوزنقه MM'P'P حول AB مساوی حجم مخروطی بارتفاع PP' و شعاع قاعده $\sqrt{15}$ شود

۲۳۳- دایره بشعاع r در داخل دایره بشعاع R قسمی واقع شده که محیطش از نقطه A مرکز دایره بزرگ R مرور نموده است از نقطه A مماس بر دایره r رسم شده امتداد این مماس دایره بزرگ R را در نقاط B و C قطع نموده است چون در نقاط B و C دو مماس بر دایره کوچک رسم شود و محل تلاقی این دو مماس نقطه E باشد اولاً زاویه BCE و فاصله AE را برحسب R و r حساب کنید ثانیاً اگر R معلوم باشد r را قسمی بیابید که نقطه E بر محیط دایره بزرگ واقع شود ثالثاً اگر H قرینه نقطه A نسبت بمرکز دایره کوچک باشد و از نقطه

H مماس بر دایره r رسم کنیم و امتدادش دایره R را در نقاط M و N قطع کند و از این نقاط دو مماس MP و NP را بر دایره کوچک رسم نمائیم ثابت کنید که نقطه P وقتی بر محیط دایره بزرگ است که نقطه E نیز بر محیط این دایره واقع باشد

۲۳۴- نیم دایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است نقطه O مرکز نیم دایره میباشد و نقطه C بر محیط آن قسمی واقع است که زاویه $BOC = \alpha$ از نقطه A وتر غیر مشخص AP با قطر زاویه x را تشکیل داده مرور نموده است این وتر شعاع OC را در نقطه M قطع نموده اولاً مطلوبست محاسبه اضلاع مثلث AOM و S مساحت چهارضلعی OMPB و بالاخره S' مساحت منطقه حادث از دوران وتر AP حول AB ثانیاً بفرض $\alpha = 90$ درجه زاویه x را قسمی تعیین کنید که $\frac{S'}{S} = \frac{m}{4\pi}$ باشد

۲۳۵- مستطیل ABCD بابعاد $AB = a$ و $AD = b$ و $a < b$ مفروض است بر دو رأس متقابل A و C دو خط موازی که با ضلع AB زاویه α تشکیل داده مرور نموده است روی دو رأس دیگر را بر این دو خط تصویر میکنیم مستطیل A'B'C'D' تشکیل میشود اگر $A'B' = a'$ و $A'D' = b'$ باشد اولاً ابعاد a' و b' را برحسب a و b و α تعیین کنید ثانیاً اگر a و b و 2p' (محیط مستطیل A'B'C'D') معلوم باشد زاویه α را حساب کنید ثالثاً برحسب a و b و S' (سطح مستطیل A'B'C'D') زاویه α را معلوم کنید رابعاً مطلوبست محاسبه ابعاد a و b برحسب زاویه α و S' و 2p'

۲۳۶- در نیم دایره بقطر $AB = 2R$ از نقطه A و نقطه O (مرکز نیم دایره) دو خط

موازی AC و OD که با قطر زاویه x را تشکیل داده مرور نموده است فرض میکنیم که نقاط D و C محل تقاطع این خط با محیط نیم دایره باشد اولاً زاویه x را قسمی تعیین کنید که مجموع مساحات ذوزنقه AODC و مثلث BCD مساوی m^2 شود پس از بحث بازاء m^2 زاویه x را حساب کنید ثانیاً زاویه x را قسمی تعیین کنید که مساحت مثلث BCD مضاعف مساحت ذوزنقه AODC شود در اینجا بازاء چه مقداری از x دو حجم حاصل از دوران مثلثات ACD و BCD حول قطر AB با یکدیگر معادل میشوند

۲۳۷ - اولاً بر حسب اضلاع مثلث مطلوبست محاسبه طول منصف الزوایای خارجی و معلوم نمائید بازاء چه شرطی این سه منصف الزاویه با یکدیگر مساوی میشوند ثانیاً اگر $c = 1$ و $ab = x$ و $a + b = 1 + 2u$ باشد بفرض معلوم بودن x یا u اضلاع مثلث را حساب نموده بحث کنید بعلاوه بر حسب x یا u مساحت و شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی داخلی و بالاخره حاصلضرب $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ را حساب کنید ثالثاً صحت روابط ذیل را وقتیکه مثلث متساوی الساقین نیست تحقیق کنید $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \sin^2\frac{C}{2}$ و $\frac{r}{R} = 4\sin^3\frac{C}{2}$ در اینجا مطلوبست حل و بحث اجزاء مثلث وقتیکه $\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ باشد

۲۳۸ - در مثلث ABC این رابطه بین زوایا برقرار است $\cos A + m\cos B\cos C = 0$ (m عددی است جبری مخالف واحد) اولاً مطلوبست محاسبه زوایای مثلث در صورتیکه $c = K.b$ باشد (ابتداء ظل زاویه B را تعیین کنید) و ثابت کنید که اگر $m < 0$

باشد زوایای مثلث حاده است ثانیاً مکان هندسی نقطه A را وقتیکه m ثابت و a تغییر کند تعیین نمائید (این مکان هندسی بیضی یا هذلولی است بمعادله $x^2 + \frac{y^2}{1-m} = \frac{a^2}{4}$)

۲۳۹ - مسئله Malfatti - در مثلث ABC زوایا و r شعاع دایره محاطیه داخلی معلوم است مطلوبست تعیین اشعه دوایری واقع در داخل مثلث بمراکز O_1 و O_2 و O_3 بقسمی که دو بدو با یکدیگر مماس خارج بوده و بترتیب بر اضلاع زاویه A و B و C مماس باشند

طریقه حل - منکسر BO_2O_3C را بر ضلع BC تصویر نموده معادله دو مجهولی بر حسب y و z اشعه دوایر O_2 و O_3 تشکیل میشود بهمین نحو اگر منکسرهای BO_2O_1A و AO_1O_3C را بترتیب بر اضلاع BA و AC تصویر کنیم دستگاهی سه مجهولی بدست میآید

۲۴۰ - در مثلث ABC زاویه A و ضلع مقابل آن یعنی a و مجموع $AC + 2AB = S$ معلوم است اولاً چون ضلع AB را به x بنامیم ثابت کنید که $(5 + 4\cos A)x^2 - 2Sx(2 + \cos A) + S^2 - a^2 = 0$ ثانیاً x تابع چه شرایطی باشد تا بازاء آن بتوان مثلث را بنا نمود ثالثاً بازاء چه مقادیری از S یک یا دو مثلث جواب مسئله است در اینجا بوجه هندسی مثلث را رسم نموده بحث کنید

۲۴۰ - اضلاع a و b و c مثلثی جمل متوالیه تصاعدی عددی میباشند بفرض

$a > b > c$ اولاً رابطه بین زوایای A و C تعیین کنید و در صورتیکه زاویه B
معلوم باشد این دو زاویه را حساب نموده بحث کنید ثانیاً ثابت کنید که بین q قدر نسبت
این تصاعد و ρ شعاع دایره محاطیه داخلی مثلث این رابطه برقرار است
$q\, tg\frac{A+C}{2} = \rho\, tg\frac{A-C}{2}$ ثالثاً اگر $k = \frac{q}{\rho}$ باشد زوایای مثلث
را تعیین نموده بحث کنید و در حالت خاص $k = 1$ زوایا را حساب کنید

۲۴۲ ـ در مثلث ABC نقطه H موقع ارتفاع وارد از رأس A است اولاً ثابت
کنید که برحسب وضع نقاط B و C و H شرط لازم و کافی برای اینکه ارتفاع
AH واسطه هندسی بین قطعات HB و HC شود آنست که زوایای B و C
تابع یکی از این شرایط باشند $B \pm C = \pm\frac{\pi}{2}$ ثانیاً اگر $B - C = \frac{\pi}{2}$
و نسبت $\frac{a}{b-c} = m$ باشد زوایای مثلث را حساب نموده بحث کنید ثالثاً
ثابت کنید که از رابطه $B - C = \frac{\pi}{2}$ رابطه $b^2 - c^2 = 2aR$
نتیجه میشود (R شعاع دایره محیطیه است) و عکس آنرا نیز تحقیق کنید رابعاً اگر رئوس
B و C ثابت باشد و نقطه A در سطح مثلث قسمی حرکت کند که $B - C = \frac{\pi}{2}$
مطلوبست تعیین مکان هندسی رأس A و مکان هندسی نقطه H محل تقاطع
ارتفاعات مثلث

۲۴۳ ـ در مثلث ABC منصف الزاویه داخلی زاویه A ضلع BC را در نقطه D
قطع نموده و تصاویر رئوس B و C بر این منصف الزاویه بترتیب نقاط
H و K است اگر $AD = l$ و $BH = h$ و $CK = k$ و $BD = x$ و $CD = y$

باشد بفرض معلوم بودن a و h و k طول x و y را تعیین کنید و اگر
نقطه D معلوم باشد بوجه هندسی مثلث را رسم نموده بحث کنید ثانیاً بفرض معلوم
بودن a و h و k معادله تشکیل دهید که مجهولش یکی از خطوط مثلثاتی زاویه
A باشد (بحث) ثالثاً بفرض معلوم بودن h و k و l طول قطعات
AH و AK را حساب کنید

۲۴۴ ـ در مثلث ABC اضلاع را به a و b و c و زوایا را به A و
B و C و شعاع دایره محیطیه را به R مینمائیم بر خط ox واقع در صفحه P از مبدأ
O زوایای xOA' و xOB' و xOC' واقع در یکطرف ox را بترتیب
مساوی A و B و C رسم نموده قطعات $OA' = a$ و $OB' = b$ و
$OC' = c$ را جدا میکنیم اولاً ثابت کنید که چهار نقطه O و A' و
B' و C' بر محیط دایره مماس بر ox واقعند ثانیاً اگر دایره محیطیه مثلث
ABC ثابت و رأس A بر محیط این دایره حرکت کند و دو رأس دیگر ثابت
باشند خط B'C' بچه وضع قرار خواهد گرفت ثالثاً ثابت کنید که مساحت مثلث A'B'C'
چنین است

$$S = \frac{R}{4}\left[\sin 2(A-B) + \sin 2(B-C) + \sin 2(C-A)\right]$$

رابعاً اگر زاویه A قائمه و ضلع a ثابت باشد زوایای B و C را وقتی که مساحت
مثلث A'B'C' ماکزیمم است حساب کنید

۲۴۵ ـ در مثلث ABC و αβγ قائمه در رئوس A و α مفروضند

مثلثات abc متشابه با مثلث αβγ را فرض میکنیم که محاط در مثلث ABC بوده و راس قائمه a بر وتر BC واقع باشد اولاً اگر امتداد bc معلوم باشد بطریقه هندسی مثلث abc را رسم کنید ثانیاً برحسب زاویه φ که ضلع bc با BC تشکیل میدهد مطلوبست تعیین مقدار K^2 نسبت مساحات دو مثلث abc و αβγ در حالات مختلفه که ممکن است اتفاق افتد بحث کنید و نیز صحت این رابطه را برای تمام حالات تحقیق کنید

$$K^2 = \frac{\overline{AB}^2 \cdot \sin^2 B}{\overline{\gamma\beta}^2 \sin^2(B+\beta)} \times \frac{1}{\sin^2(B-\varphi+\gamma)}$$

ثالثاً اگر مثلث αβγ معلوم باشد مینیمم سطح مثلث abc را تعیین کنید

۲۴۶- در مثلث ABC مجموع $l = h_b + h_c$ و تفاضل $d = b - c$ و ضلع $BC = a$ معلومند اولاً معادله تشکیل دهید که ریشه اش زاویه A باشد این معادله را ممکن است بمعادله تبدیل کنید که ریشه اش $\cos\frac{A}{2}$ باشد ثانیاً اگر a و d پارامتر ثابت باشند با معلومات سابق در مسئله بحث نموده معلوم کنید چند مثلث جواب است ثالثاً از رئوس B و C خطوط BD و CE را بموازات منصف الزاویه خارجی A رسم نموده (نقطه D بر ضلع AC و نقطه E بر امتداد ضلع AB واقع است) مطلوبست برحسب l و d محاسبه مساحت ذوزنقه متساوی الساقین BDCE و رسم مستطیلی بقطر BC معادل آن را ابعاد بوسیله طریقه ترسیمی برای رسم مثلث یافته معلوم کنید در چه حال رسم مثلث ممکن است

۲۴۷- دو دایره S و Δ بمرکز مشترک O و اشعه R و r ($R>r$) مفروضند در سطح این دو دایره دو محور ox و oy عمود بر یکدیگر رسم شده در دایره S وتر AB

بموازات محور ox ضلع مثلث منتظم محاطی است اگر زاویه حادث بین شعاع غیر مشخص OM دایره کوچک Δ با محور ox باشد اولاً برحسب R و α و خطوط مثلثاتی α مطلوبست محاسبه مربع فواصل MA و MB و ثابت کنید که مربع حاصلضرب $MA \times MB$ درجه دوم است برحسب $\sin\alpha$ ثانیاً بازاء $R=2$ و $r=1$ مواضع نقطه M را طوری بیابید که حاصلضرب $MA \times MB$ مساوی شود ثالثاً در حالت کلی مطلوبست تعیین موضع نقطه M بطوری که $MA \times MB = R^2 - r^2$ و در اینحال اگر خط AM دایره کوچک را در نقطه P و دایره بزرگ را در نقطه Q قطع کند ثابت کنید که $AP = MQ = MB$ و مثلث BMQ متساوی الساقین است بدینوسیله بوجه هندسی موضع نقطه M را تعیین کنید اگر نقطه C راس سوم مثلث متساوی الاضلاع ABC باشد و خط BM دایره Δ را در نقطه N قطع کند ثابت کنید که خط CN از نقطه P میگذرد و مثلث MNP متساوی الاضلاع است

کتبه العبد حسین میرخانی ابن مرحوم آقا سید مرتضی خوشنویس

برغانی

در مطبعه علمی طبع گردید

کتابخانه و لوازم التحریری

مهـــــــران

از هر قبیل کتب کلاسیك - لوازم دفتری - لوازم

نقاشی - لوازم مهندسی - انواع کاغذ های تاك

مقوا و غیره در دسترس آقایان محترم گذارده

و سفارشات را در اسرع وقت

انجام خواهد داد

آدرس خیابان شاه (شاه آباد)

کتابخانه و لوازم الحریری مهران

مثلثات

مخصوص دورهٔ دوم متوسطه

مطابق دستور شورای عالی معارف

= تالیف =

محسن هنربخش — محمود مهران

معلمین علوم ریاضی

حق طبع محفوظ است

آذر ۱۳۱۳

= مطبعه نوین - طهران =